



8º CONGRESO IBEROAMERICANO DE INGENIERIA MECANICA

Cusco, 23 al 25 de Octubre de 2007

UNA PROYECCIÓN SINTÉTICA PARA EL DISEÑO ARQUITECTÓNICO CON LA LUZ DEL SOL

Benoit Beckers, Luc Masset & Pierre Beckers

Aerospace & Mechanical Engineering Department
Institut de Mécanique et Génie Civil (B52)
Chemin des Chevreuils 1, Liège, Belgium, Tel: (32)43669450 – Fax: (32)43669141
<http://www.ltas.ulg.ac.be/>
Luc.Masset@ulg.ac.be; Pierre.Beckers@ulg.ac.be

RESUMEN

Al principio del proyecto, el arquitecto manipula formas y dimensiones para resolver diversos problemas. Los programas de DAO soportan eficazmente tales tareas. Actualmente, sin embargo, se están imponiendo normativas de iluminación natural muy severas, tanto para el desarrollo urbano como para la edificación. Las proyecciones estándar ya no bastan para controlar precisamente los aportes lumínicos y energéticos. El programa informático Heliodon, desarrollado por los autores, ofrece proyecciones especializadas: el usuario dibuja su escena en una planta sombreada; puede examinarla en la vista 3D y, simultáneamente, controlar la iluminación, gracias a los trayectos solares representados en una estereografía de la escena. Pero ésta no permite cuantificar los cambios del diseño. Por eso, proponemos una proyección original, que llamamos isócrona, cuyos ejes reflejan la evolución diaria y anual de la posición del sol. Como la estereografía, es un gráfico temporal y puntual. Para el punto elegido, la proyección de los objetos (edificios, paredes,...) representa la época durante la cual estos enmascaran el sol. Calculando esta fracción en los nudos de una reja, el usuario obtiene un mapa describiendo la cantidad de iluminación directa, ponderada por la atenuación atmosférica. Ofrecemos así unos gráficos muy sintéticos y útiles sin sacrificar ninguna información geométrica.

PALABRAS CLAVE: proyecciones geométricas, asoleo, radiación, arquitectura.

ILUMINACIÓN SOLAR

La primera etapa del cálculo de la iluminación solar consiste en conocer la posición del sol en todo momento dentro de los ejes locales del observador. Desde un punto de la tierra, el movimiento del sol se basa esencialmente en dos rotaciones, la primera con un largo período, un año, y un radio considerable, una unidad astronómica, o sea unos 150 millones de kilómetros, la segunda con un período corto, un día, que se realiza alrededor del eje norte-sur de la esfera terrestre. Estos dos ejes son respectivamente perpendiculares al plano de la eclíptica y al plano del ecuador terrestre. A continuación, definiremos ambos movimientos.

MOVIMIENTO DE LA TIERRA ALREDEDOR DEL SOL

La tierra gira alrededor del sol en 365.25 días. Su trayectoria se realiza en el plano de la eclíptica, el cual se halla inclinado de 23.5 grados con respecto al plano ecuatorial terrestre. En astronomía, tales hipótesis no bastan para obtener datos de posición precisos, pues es necesario recordar que la trayectoria es elíptica, lo cual conduce a considerar la ecuación del tiempo y a resolver la ecuación de Kepler. Sin embargo, para la concepción del proyecto de arquitectura, la aproximación circular no afecta las elecciones que tomar.

La posición del sol es luego dada por su posición angular sobre una trayectoria supuesta circular. Esta posición puede relacionarse con los días al establecer la equivalencia entre el año y un círculo de 360 grados. Queda luego definida por la siguiente fórmula, donde d es el número del día en el año.

$$i = (d / 365.25) 360^\circ - 90^\circ \quad (1)$$

El origen de los ángulos es adaptado de modo que el ángulo valga 0° en el paso por el punto vernal, es decir: en el equinoccio de primavera (21 de marzo).

En coordenadas cartesianas, en el plano de la eclíptica, las coordenadas cartesianas del sol se derivan de la siguiente relación, donde, ya que la distancia se mide en unidad astronómica – eso es: la distancia media de la tierra al sol – el radio vale uno. En esta ecuación, como sólo estudiamos dos cuerpos, podemos también considerar que el sol gira alrededor de la tierra. Su posición es dada por el vector P_S .

$$P_S = [\cos i \quad \sin i \quad 0.] \quad (2)$$

El eje sur-norte de la tierra, por definición perpendicular al plano ecuatorial, tiene una dirección constante; apunta hacia la estrella polar y está inclinado de 23.5 grados. Este eje se representa mediante el vector N :

$$N = [0. \quad \sin 23.5^\circ \quad \cos 23.5^\circ] \quad (3)$$

Al efectuar el producto escalar de estos dos vectores, encontramos el coseno del ángulo entre la dirección del sol y el eje de rotación de la tierra.

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) = \sin 23.5^\circ \sin i \quad (4)$$

El complemento de este ángulo es la declinación del sol. En la Ec. (4), se expresa en radianes y se calcula para cada día del año. Es también la altura angular del sol por encima del plano ecuatorial en su paso por el meridiano de referencia.

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \arcsin (\sin i \sin 23.5^\circ) \quad (5)$$

Deducimos el gráfico de la figura 1, que da el número de días durante los cuales el sol se encuentra a mediodía a una altura de $\pm n$ grados; los datos están repartidos en 92 columnas, centradas sobre $0^\circ, 1^\circ, \dots, 23^\circ$. Recorremos así las 92 declinaciones del sol medidas en ángulos enteros, con, respectivamente en rojo y en azul, los solsticios de verano y de invierno. El gráfico nos indica claramente que, para la altura del sol, tres días bastan prácticamente para describir el año entero: ambos solsticios y un día de equinoccio (en color turquesa).

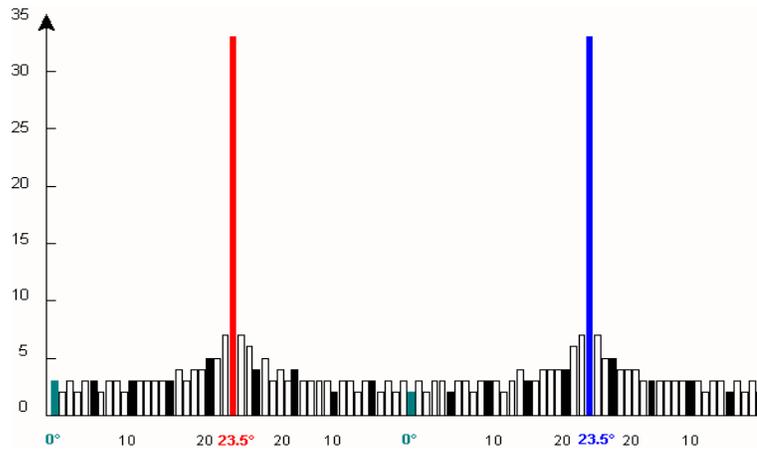


Fig. 1: Número de días para diferentes declinaciones del sol

El sol se demora mucho más tiempo en las regiones de los solsticios que en las de los equinoccios, lo cual se observa también en la proyección estereográfica de los trayectos solares, aunque las distancias entre trayectos no se vean en verdadera magnitud.

POSICIÓN DEL SOL EN LOS EJES LOCALES

La tierra gira sobre sí misma en 24 horas, y la posición del sol depende de esta rotación representada por la hora. Consideremos pues tres vectores apuntando desde el centro de la esfera terrestre hacia tres puntos de su superficie, respectivamente hacia el polo norte N, hacia el sol S y hacia el cenit del punto estudiado P donde se encuentra el observador. El ángulo entre N y S es por definición el complemento de la declinación del sol: $90^\circ - \delta$, Ec.(5). Recordemos que este ángulo varía a lo largo del año entre -23.50° y $+23.5^\circ$, posiciones en los solsticios de invierno y de verano. El desfase horario corresponde al ángulo entre el meridiano de la hora y el de mediodía: $15^\circ/h (t-t_0)$, t midiéndose en horas. El ángulo entre N y P define la colatitud $90^\circ - \varphi$. Calculamos para empezar el ángulo entre la vertical local P y la dirección del sol S, sea por lo tanto: ψ , llamado también ángulo cenital. Se obtiene simplemente utilizando la fórmula clásica de los triángulos esféricos [1].

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos[15(t - t_0)] \quad (6)$$

De esta fórmula deducimos, por ejemplo, que en el ecuador ($\varphi = 0$), todos los días tienen la misma duración. En efecto, cuando el sol se halla sobre el horizonte, $\psi = 90^\circ$, se verifica que $t = \pm 6$ horas. En la hora del mediodía solar, ($t = t_0$), podemos calcular la relación entre el ángulo cenital, la latitud y la declinación del sol: $\psi = \varphi - \delta$.

Queda ahora por definir el acimut del sol, es decir su dirección con relación al meridiano local. Es el ángulo ζ de la misma figura. Retomamos la fórmula de los triángulos esféricos, suponiendo conocido el ángulo ψ .

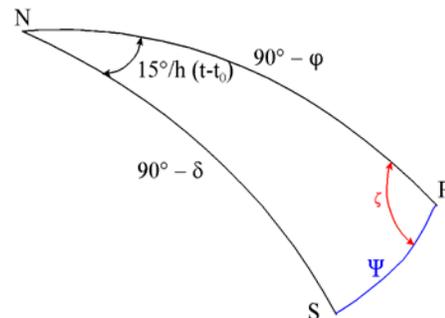


Fig. 2: Posiciones sobre la esfera

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \cos \zeta \quad (7)$$

Obtenemos así:

$$\cos \zeta = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \cos \psi}{\cos \varphi \sin \psi} \quad (8)$$

La fórmula debe eventualmente ser ajustada según el origen y el sentido de medición de los ángulos. Al observar una estereografía del ecuador, comprobamos que en verano el sol yace sobre el horizonte en el acimut $\zeta = \pm 66.5^\circ$ medido a partir del norte. Para una latitud de $\pm 90^\circ$, el resultado es indeterminado.

DIAGRAMA ISÓCRONO

Con la ayuda de las Ec. (6) y (8), podemos calcular la posición del sol a lo largo del año para un lugar geográfico dado. Es lo que muestra la figura 3. Llevamos en el eje horizontal los ángulos expresados en horas y en el vertical los días del año Ec. (1). Las curvas indican las alturas angulares del sol $90^\circ - \psi$ obtenidas a partir de la Ec. (6). Al recorrer este gráfico horizontalmente, vemos desfilar un día. Verticalmente, vemos desfilar un año a una hora fija. Si impusiéramos a este gráfico una escala adecuada, cada uno de sus puntos representaría una hora.

Como indicado anteriormente (figura 1), ya que la declinación del sol permanece casi fija a lo largo de los meses que rodean los solsticios, su altura angular a mediodía es también casi constante. Eso se nota a la izquierda en el solsticio de verano para un punto situado en el trópico del Capricornio y a la derecha en el solsticio de invierno para un punto situado en Ushuaia (Argentina).

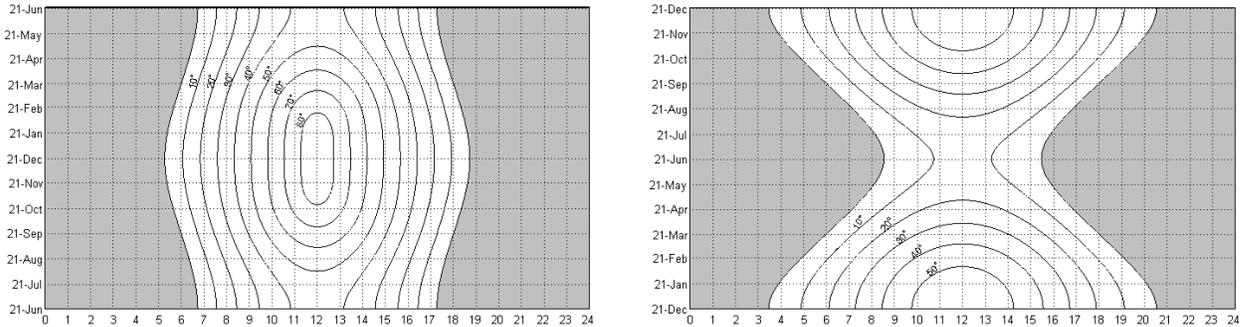


Fig. 3: Isócronas centradas en un solsticio – Trópico del Capricornio - Ushuaia

INFLUENCIA DE LA ATMÓSFERA

Según su inclinación, el rayo solar atraviesa un espesor variable de la atmósfera. Por encima de esta, la intensidad del flujo radiativo solar en la banda de frecuencias de interés vale S_{p0} . El flujo que alcanza un punto de la tierra puede escribirse [2]:

$$S_p = S_{p0} \tau^m \quad (9)$$

El término τ representa la transmitancia de la atmósfera, mientras que el factor m es el número de masa óptica del aire, es decir: la relación entre el trayecto actual en la atmósfera y el trayecto cenital. En general, se toma $\tau = 0.7$ y $S_{p0} = 1380 \text{ Wm}^{-2}$. Si el ángulo ψ es inferior a 80° , los fenómenos de refracción son despreciables y m es definido por la relación:

$$m = \frac{p_a}{101.3 \cos \psi} \quad (10)$$

Según esta ley, el flujo máximo se obtiene para un rayo vertical. Al nivel del mar, vale $0.7 * 1380 \text{ Wm}^{-2}$, es decir: 966 Wm^{-2} .

La relación $p_a / 101.3$ es igual a la presión atmosférica en el punto de observación dividida por la presión al nivel del mar, las presiones se expresan en kPa. La presión 101.3 kPa es la presión atmosférica llamada normal. Corresponde a una atmósfera. Esta relación corrige los efectos de la altitud. La presión atmosférica p_a se define generalmente con la ley:

$$p_a = 101.3 e^{\frac{-\text{altitud}}{8.200}} \quad (11)$$

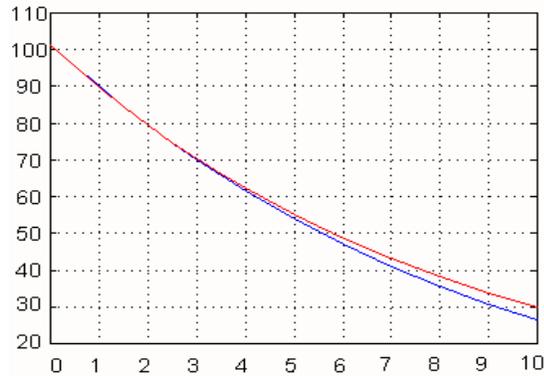


Fig. 4: Presión atmosférica en kPa, en función de la altitud en km.

La altitud se expresa en kilómetros. En el diagrama de la figura 5, se compara la presión calculada, en rojo, con datos normalizados de la referencia [3], en azul. Vemos que hasta una altitud de unos cinco kilómetros las dos curvas son idénticas. A 5000 metros de altitud, la presión cae a la mitad.

Detengámonos ahora en la evaluación de la absorción atmosférica calculada a partir de la Ec. (9). En el gráfico de la figura 5, se representa el porcentaje de transmisión en función del ángulo cenital ψ del rayo solar. La curva en negro corresponde al nivel del suelo. En la curva en rojo, para 4000 metros de altitud, vemos que la transmisión vertical pasa de 70% a más de 80% en el cenit.

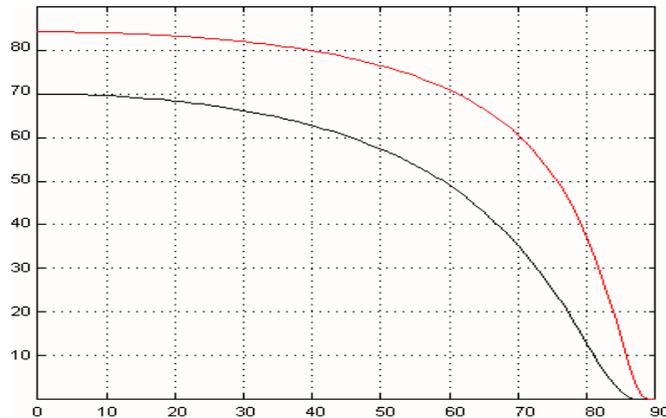


Fig. 5: Coeficientes de absorción atmosférica a 0 m. y 4000 m. de altitud.

Para un punto situado en el ecuador, vemos en el diagrama isócrono de la figura 6 que el factor de transmisión es superior a 60% desde las 9 h 30 hasta las 14 h 30, aproximadamente. Esta transmisión del 60% corresponde a una altura solar superior o igual a 45° (fig. 6). De acuerdo con el diagrama de la figura 6, las curvas isovalores de la potencia recibida se escalonan más suavemente en torno al máximo que las de la altura angular del sol.

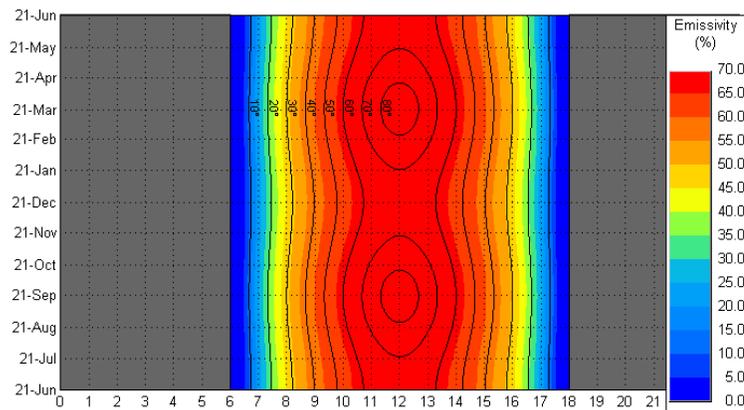


Fig. 6: La transmisión de la radiación solar en el ecuador

Multiplicando este factor por la potencia exo-atmosférica $S_{p0} = 1380 \text{ Wm}^{-2}$ e integrando en el tiempo, obtenemos el flujo de energía que alcanza el punto considerado. Se expresa habitualmente en kWh/m^2 . En este cálculo, no se toma en cuenta la dirección del flujo. Esto significa que, si queremos captar la energía, necesitaremos un receptor adecuado, por ejemplo un panel solar que se oriente constantemente de modo a mantenerse perpendicular al flujo. Esta energía es, por lo tanto, el valor máximo que podremos obtener en un punto.

La integración temporal puede efectuarse para períodos definidos a la vez sobre un intervalo horario y sobre un intervalo de días. Si integramos sobre el año completo, la suma de los períodos diurnos es siempre igual a la suma de los períodos nocturnos y equivale a medio año, o sea 4383 horas. En el ecuador, todos los días son iguales (fig. 6), mientras que en los polos hay un solo día y una sola noche que se dividen el año.

Resulta interesante comparar los valores anuales reducidos a un solo día, dividiendo el total por 365.25. La energía varía casi de un factor dos entre el ecuador y el polo, como indicado en la columna 3 de la tabla 1. Pero el asoleo es muy distinto según la latitud. Así, en la línea que corresponde al ecuador, vemos que la energía es bastante constante, siendo su variación máxima de un 5% entre los solsticios y los equinoccios.

Esta variación aumenta significativamente con la latitud y, por ejemplo, en Ushuaia, la variación entre el invierno y el verano es superior a un factor 10. Observamos también que la radiación disminuye con la latitud, muy fuertemente en invierno, y, en torno a los equinoccios, de manera similar al promedio anual. En el polo, la radiación es nula entre el equinoccio de otoño y el de primavera (noche polar).

En verano, en cambio, el hecho de que la incidencia del rayo solar disminuye con la latitud queda más que compensado por el aumento de la duración de los días y, como consecuencia curiosa, es en el polo donde encontramos el mayor asoleo diario en torno al solsticio de verano.

En las dos últimas líneas de la tabla, examinamos lo que ocurre en dos ciudades ubicadas en altitud y observamos unos aumentos significativos. Estos se aprecian mejor al calcular para las latitudes anteriores lo que ocurriría a 4000m de altitud. Es lo que propone la última columna de la tabla (en azul).

Tabla 1: Energías recibidas en función de la latitud y de la altitud

Energías en kWh/m^2	latitud	Promedio anual	21 junio	21 septiembre	21 diciembre	21diciembre (4000m)
Ecuador	0°	8.18	7.99	8.39	7.99	10.1
Tróp. Capricornio	23°30' S	7.77	5.84	8.02	9.29	11.6
Concepción	36°46' S	7.12	4.04	7.38	9.77	12.3
Ushuaia	54°48' S	5.61	0.83	5.84	10.3	13.3
Círculo antártico	66°30' S	4.54	0.	4.11	10.7	14.5
Polo sur	90° S	4.01	0.	0.	13.5	19.1
Cuzco (3400 m)	13°32' S	9.87	8.66	10.1	10.7	
La Paz (4000 m)	16°30' S	10.1	8.65	10.3	11.2	

Hemos comparado las situaciones en diferentes puntos del globo limitándonos al examen de tres días característicos. Tal procedimiento puede justificarse realizando el siguiente cálculo.

En Ushuaia, el 21 de diciembre, entre las 9 y las 15 horas, la energía recibida es de 5.30 kWh/m^2 . Si examinamos los 20 días (del 11 al 30 de diciembre) o los 40 días (del 1 de diciembre al 9 de enero) que rodean esta fecha, obtenemos casi exactamente 20 o 40 veces el valor del 21 de diciembre. Si examinamos el día completo, es decir: períodos de tiempo cuya duración varía de día en día, pasamos para el 21 de diciembre de 5.30 kWh/m^2 a 10.3 kWh/m^2 , pero, considerando nuevamente 20 o 40 días, los resultados siguen siendo 20 o 40 veces superiores. En el círculo polar, sacamos conclusiones similares. Esta constancia de la energía recibida en las fechas próximas a los solsticios confirma la observación hecha más arriba a propósito de la figura 1.

Todo lo explicado hasta ahora se aplica a un paisaje plano y desprovisto de cualquier vegetación o relieve. En la práctica, el sol queda a menudo enmascarado por objetos naturales o construcciones. Conviene pues introducir su geometría, lo cual se realiza según los métodos clásicos de la proyección y de la detección de las superficies visibles. Para este cálculo, resulta muy práctico efectuar previamente una proyección sobre la esfera y, luego, siguiendo el mismo método ya utilizado para el cálculo de la posición del sol, podemos trasladar las máscaras sobre el diagrama isócrono [4].

Ahora bien, la meta de conseguir un programa de simulación realmente interactivo, como lo es "Heliodon 2" [5], utilizado a continuación, introduce sin embargo una exigencia muy fuerte que conduce a buscar los algoritmos más performantes y a implantarlos con el mayor cuidado [6].

INTERVENCIÓN DE LA GEOMETRÍA

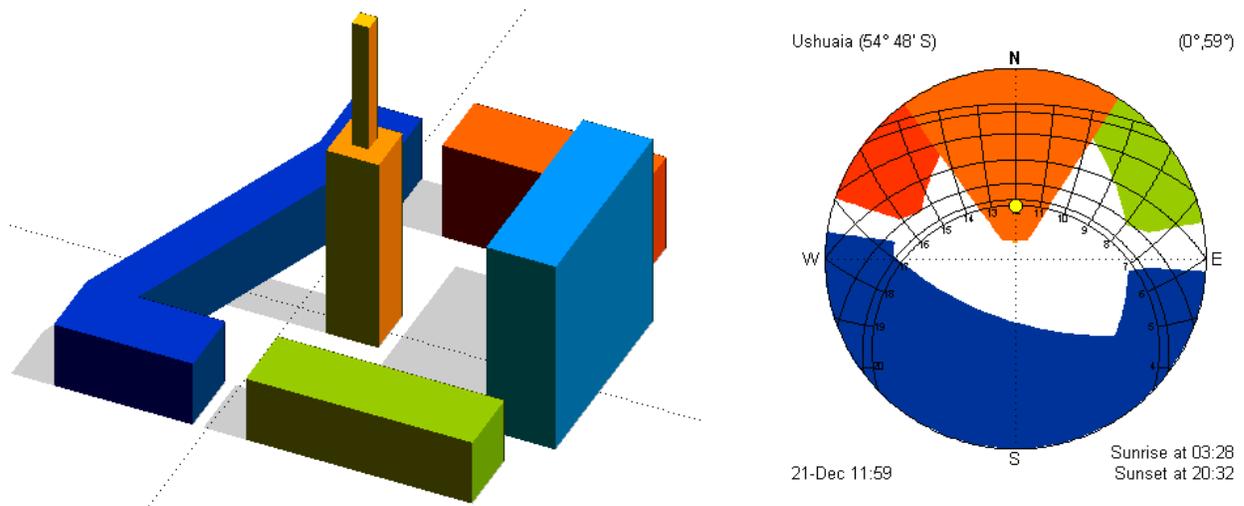


Fig. 7: Conjunto arquitectónico imaginario, y estereografía para la latitud de Ushuaia

Para el conjunto arquitectónico de la figura 7 y en el punto indicado por las líneas punteadas, el diagrama isócrono da el resultado de la figura 8.

Desde este punto de observación, no se ve nunca el sol en los días cercanos al solsticio de invierno. Para puntos próximos al elegido, la torre central desenvuelve un papel importante a mediodía durante todo el año. Al hallarse el sol bastante alto a mediodía en verano, según la Ec. (6), $\psi = \varphi - \delta = \pm 31^\circ$, visto el diagrama de la figura 5, la radiación recibida es casi igual que al ecuador. Aunque la clásica estereografía (figura 7) permite también observar las horas de iluminación, sólo el diagrama isócrono permite cuantificarlas (figura 8). Notemos sin embargo que la utilización simultánea de ambos gráficos permite asimilar mejor las condiciones de iluminación solar. En efecto, en la estereografía, vemos la bóveda celeste completa, mientras que la isócrona sólo nos enseña la parte del cielo en la cual se desplaza el sol.

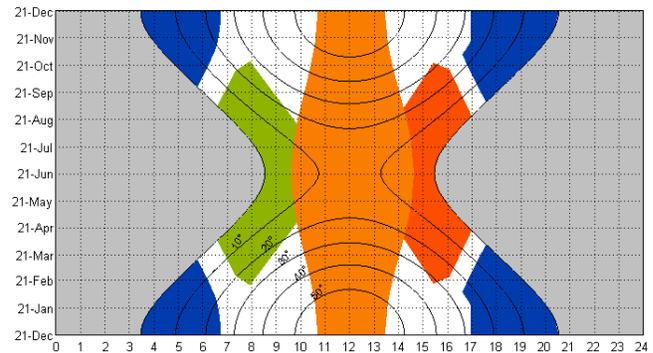


Fig. 8: Proyección isócrona correspondiente

ASOLEO

Los diagramas anteriores nos permiten conocer la situación en un punto a lo largo del tiempo, pero no nos pueden ofrecer un balance global, el cual necesita una integración temporal. Esta se realiza fácilmente en la isócrona de la figura 8, donde basta con “contar los píxeles blancos”, lo que nos da inmediatamente el número de horas soleadas en el intervalo de tiempo considerado. Ponderando esta cuenta según la fórmula de la Ec. (9), o cualquier otra fórmula de este tipo, se obtiene una energía, u otra magnitud física según el factor utilizado. Notemos sin embargo que se trata siempre de una magnitud escalar y que ésta es evaluada en un punto del espacio sin ninguna consideración del receptor eventual de la radiación.

Este resultado puntual ofrece una primera indicación al conceptor para cuantificar el nivel de iluminación. La comparación del resultado en diferentes puntos del espacio permite luego apreciar la influencia de la configuración geométrica.

Para calcular la distribución de esta magnitud en el espacio tridimensional, podemos reproducir el cálculo en los nudos de una reja 3D y luego interpolar el resultado, pero, para visualizarlo, hay que elegir entre limitarse a la frontera exterior o a la piel de esta reja, o bien efectuar cortes. Esta es la solución elegida en esta presentación. No obstante, para acelerar los cálculos, mallamos directamente las superficies de corte. Los gráficos de interpolación de las magnitudes estudiadas ofrecen así los mapas deseados. A modo de ilustración, elegimos un problema geométrico elemental.

El edificio, una pérgola, se reduce a una placa cuadrada horizontal, en naranja sobre la figura 9. El cálculo se realiza sobre una malla horizontal situada por debajo de la placa y rodeándola completamente. Comparamos las energías recibidas en Ushuaia el 21 de marzo (a la derecha) o durante los 20 días rodeando el 21 de marzo (a la izquierda). Como en el ejemplo anterior de la figura 7, la relación 1 a 20 siempre se respeta (para la visibilidad de los dibujos, elegimos escalas diferentes). Observamos igualmente que las transiciones son más netas si sólo consideramos el día del equinoccio (a la derecha) y que, en este día, el diagrama se compone de bandas verticales paralelas. Si estudiáramos las sombras arrojadas, veríamos que se desplazan en un movimiento de translación perfecto de este en oeste.

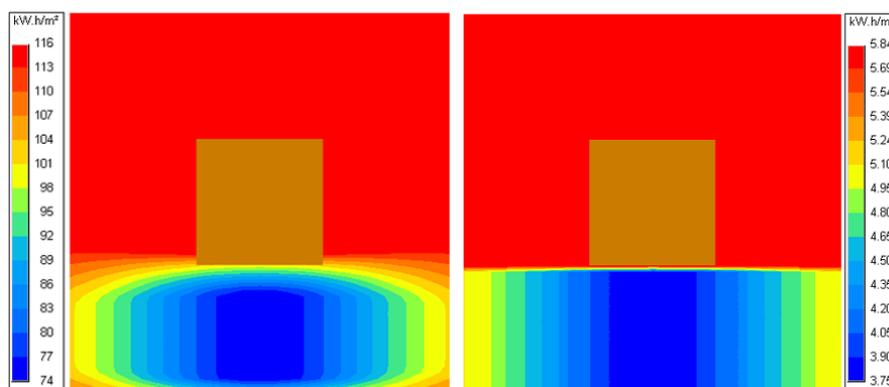


Fig. 9: Energía recibida en Ushuaia en la época del equinoccio

El principal interés de este ejemplo es de mostrar la influencia sobre los mapas de la configuración geométrica, puesta en valor si elegimos un período de tiempo muy corto, y, a la vez, de la evolución en el tiempo, que tiende a atenuar los contrastes por el hecho del cambio de declinación del sol.

VARIACIÓN DE LA RADIACIÓN EN FUNCIÓN DE LA LATITUD

Comparemos ahora las energías recibidas en presencia de un edificio muy sencillo: una columna con base cuadrada tres veces más alta que ancha. La prueba se realiza el 21 de diciembre, con una duración de 24 horas. Representamos solamente la mitad de la escena, ya que existe una simetría este-oeste. En la malla de evaluación, la energía máxima recibida es, en el ecuador: 8 kWh/m², en Ushuaia: 10.3 kWh/m², el círculo antártico: 10.7 kWh/m². Esto significa que, en esta época, el asoleo recibido en la zona sur no queda afectado en absoluto por la presencia del edificio. En el polo sur, en cambio, es de 12.2 kWh/m²; hay por lo tanto un déficit de 10%, debido a la presencia del edificio. Podemos deducir de este tipo de gráfico cuáles son las zonas más expuestas o mejor protegidas con respecto al asoleo directo.

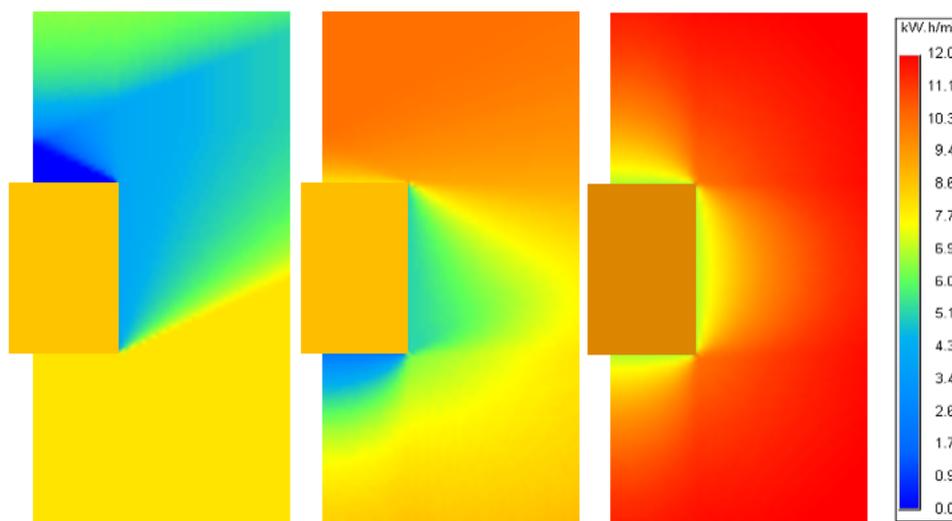


Fig. 10: Energía recibida, para un mismo edificio ubicado a 0°, 54° y 90° de latitud sur, el 21 de diciembre

CONCLUSIONES

El diagrama isócrono presentado en esta comunicación permite visualizar en el tiempo la parte de la bóveda celeste sobre la cual se desplaza el sol. A partir de las ecuaciones de la mecánica celeste, representamos en cualquier punto de la tierra la posición del sol en un momento preciso: día y hora. Los intervalos de tiempo se ven en verdadera magnitud, o, dicho de otro modo, cada píxel del gráfico representa el mismo intervalo de tiempo, a diferencia de lo que ocurre en la clásica representación estereográfica.

La primera ventaja es que la visión temporal de las posiciones del sol es cuantitativamente correcta. Además, se facilitan mucho las integraciones temporales, que se obtienen por simple cuadratura de las zonas concernidas.

Tratándose de la iluminación solar directa, resulta importante tener en cuenta la atenuación atmosférica. Afectando las integraciones con los factores adecuados, se calcula fácilmente la cantidad de energía que alcanza el punto considerado.

La introducción de los objetos susceptibles de enmascarar el sol se realiza de manera eficaz aprovechando las propiedades de la proyección sobre la esfera, para beneficiarse luego de la técnica del *z-buffer*.

Una aplicación directa de este cálculo consiste en establecer una representación de la energía incidente en el volumen. Se visualiza mediante cortes planos en el espacio 3D. El resultado depende luego de la posición geográfica y de la altitud, pero es independiente de cualquier receptor.

El estudio de la radiación solar en el volumen no es muy corriente, ya que los especialistas suelen privilegiar los cálculos sobre superficies receptoras (muros y techos, paneles solares,...); sin embargo, ofrece, en nuestra opinión, la gran ventaja de una relación límpida entre la geometría de la escena y su enmascaramiento del sol. Pensamos, por lo tanto, que debería resultar muy útil en problemas arquitectónicos y urbanos más complejos, como etapa intermedia entre los primeros esbozos del diseño y el balance térmico final [7].

Todas las simulaciones se realizan con un solo parámetro físico – la atenuación atmosférica –, pero considerando de manera precisa los datos geométricos. Los ejemplos aquí presentados tienen un interés didáctico evidente y ofrecen al diseñador los medios de una percepción objetiva y sintética de la influencia de la iluminación solar sobre la concepción de los conjuntos arquitectónicos.

REFERENCIAS

1. Beckers P., *Communication graphique*, Editions de l'Université de Liège, 2003.
2. Gaylon S., Campbell J. & Norman M., *An introduction to Environmental Biophysics*, New York: Springer, second edition, 1998, ISBN 0-387-94937-2.
3. Manuel de l'atmosphère type, OACI (Organisation de l'aviation civile internationale), (élargie jusqu'à 80 kilomètres (262 500 pieds)), Doc. 7488/3, édition, 1993.
4. Beckers B., Masset L. & Beckers P., "Enrichment of the visual experience by a wider choice of projections", Proc. of the 2007 11th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design, April 26 - 28, 2007, Melbourne, Australia, Edited by: Weiming Shen & al, IEEE Catalog Number: 07EX1675C, ISBN: 1-4244-0963-2, Library of Congress: 2007920353.
5. Beckers B. & Masset L., "Heliodon 2", Software and user guide, 2006.
6. Beckers B., Masset L. & Beckers P., "Descriptive Geometry Mutating to Design Tool", Proceeding of ICCES05 Conference, Chennai, India, December 2005.
7. Beckers B., "Geometría sensible", Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, 2005.

UNIDADES Y NOMENCLATURA

δ	: declinación
φ	: latitud
ψ	: ángulo cenital
ζ	: azimut del sol
S_{p0}	: potencia exo-atmosférica = 1380 Wm^{-2}
S	: radiación solar en Wm^{-2}
τ	: transmitancia
m	: número de masa óptica del aire
p_a	: presión atmosférica a nivel del mar