

Comment calculer la déclinaison du soleil

Benoit Beckers & Pierre Beckers

Septembre 2010

On compare cinq méthodes pour calculer la déclinaison du soleil, c'est-à-dire l'angle entre la direction du soleil et le plan équatorial. Le mouvement relatif du soleil par rapport à la terre est composé d'une part d'un mouvement annuel pendant lequel la terre se déplace sur une orbite elliptique quasiment circulaire (excentricité proche de zéro) et d'autre part du mouvement de rotation de la terre sur elle-même de périodicité égale à un jour ou 24 heures. Dans ce dernier mouvement, le soleil semble décrire une trajectoire qui correspond à un parallèle situé entre les deux tropiques, celui du Cancer au solstice de juin et celui du Capricorne au solstice de décembre. La déclinaison du soleil peut donc être assimilée à la latitude du parallèle décrivant la trajectoire du soleil pour un jour donné.

Dans les deux premières méthodes, on suppose que la trajectoire du soleil est une orbite circulaire (en réalité, c'est une ellipse de très faible excentricité, $e = 0.017$) inclinée de 23.45 degrés par rapport au plan de l'écliptique. L'intersection du plan de cette orbite avec le plan de l'écliptique correspond à la ligne des équinoxes (mars – septembre).

La première méthode, présentée précédemment par les auteurs¹, se base sur l'hypothèse d'une orbite terrestre circulaire. A partir de cette hypothèse, il est aisé de développer une solution explicite..

Dans les formules qui suivent, l'angle δ désigne la **déclinaison en degrés** et J le numéro du jour de l'année du calendrier.

$$\delta = \frac{180}{\pi} \arcsin \left(\sin \pi \frac{23.45}{180} \sin \frac{2\pi}{365.25} (J - 81) \right) \quad (1.1)$$

Une seconde formule, attribuée à Desmond Fletcher, est mentionnée dans l'encyclopédie en ligne Wikipedia². Comme on le verra plus loin, elle donne d'assez bons résultats, même si elle n'est pas cohérente avec la formule précédente.

$$\delta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (284 + J) \right) \quad (1.2)$$

La troisième méthode est tirée du livre de Campbell & Norman³, formule 11.2, page 168. Elle ressemble à un développement de (1.1), mais sa référence exacte nous est inconnue. Cette formule tient compte de l'ellipticité de la trajectoire terrestre.

$$\delta = \frac{180}{\pi} \arcsin \left(\sin \pi \frac{23.45}{180} \sin \left(278.97 + \frac{360}{365.25} J + 1.9165 \sin \left(356.6 + \frac{360}{365.25} J \right) \right) \right) \quad (1.3)$$

Une quatrième solution, obtenue par développement en séries de Fourier, a été proposée par Spencer⁴.

¹ "Une projection synthétique pour la conception architecturale avec la lumière du soleil", B. Beckers, L. Masset & P. Beckers, Rapport Helio_003_fr, 2008, www.heliodon.net

² "Solar Declination", D. Fletcher, 2007, <http://en.wikipedia.org/wiki/Declination>

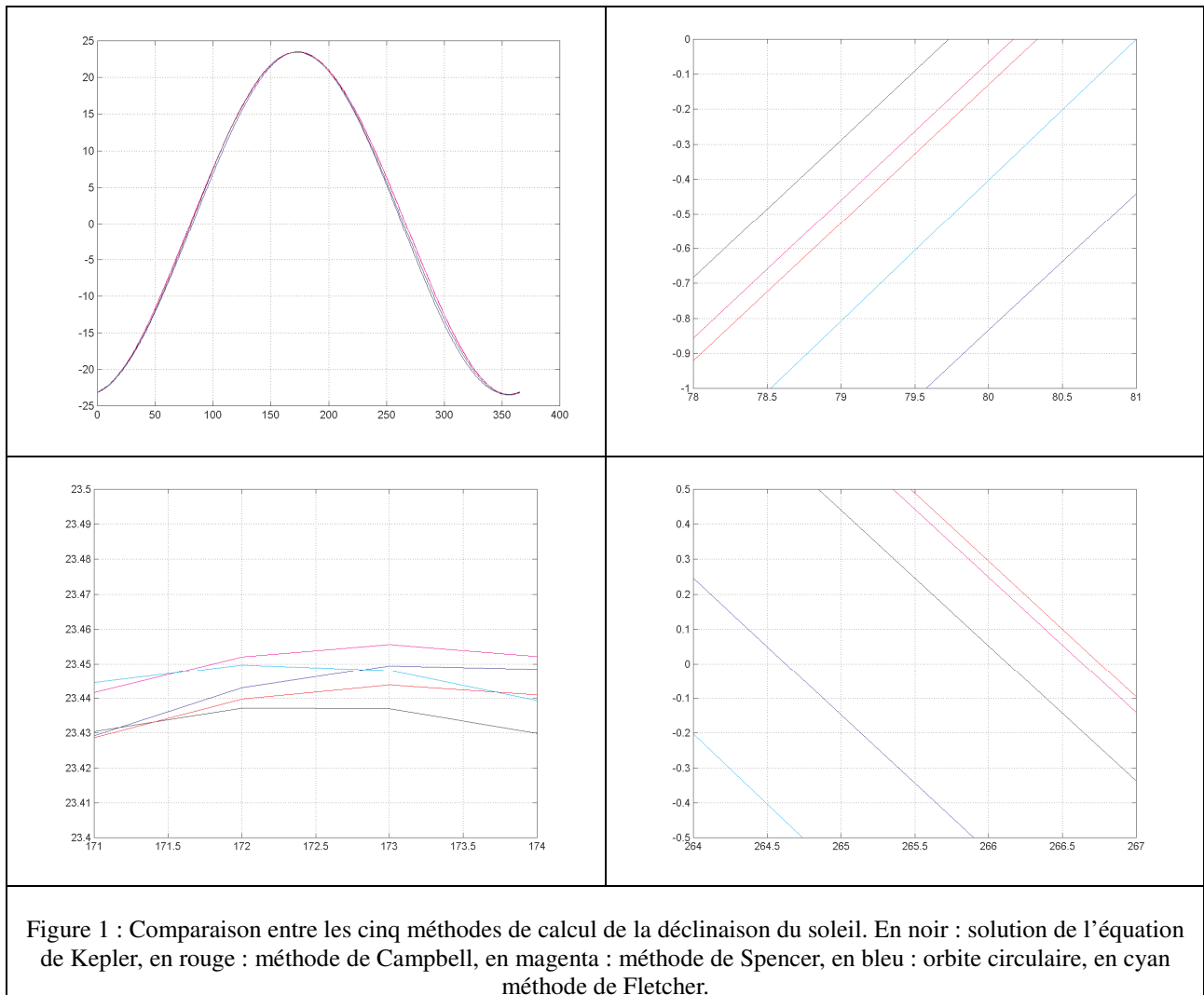
³ "An introduction to Environmental Biophysics", G.S. Campbell & J.M. Norman, New York: Springer, 2nd ed., 1998.

⁴ "Fourier series representation of the position of the Sun", J.W. Spencer, Search Vol 2 (5) 172, 1971.

$$\begin{aligned}
\delta &= 0.006918 \\
&- 0.399912 \cos \gamma + 0.070257 \sin \gamma \\
&- 0.006758 \cos 2\gamma + 0.000907 \sin 2\gamma \\
&- 0.002697 \cos 3\gamma + 0.00148 \sin 3\gamma
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{365}(J-1)$$

La dernière méthode⁵ est dite exacte, car la position de la terre y est calculée à partir des données astronomiques complètes. Ce calcul implique la solution de l'équation du temps (équation de Kepler).



Les cinq solutions sont superposées dans le graphique supérieur gauche de la figure 1. Les résultats sont montrés en détail à l'équinoxe de printemps (graphique supérieur droit), où on voit que selon la courbe noire la terre traverse l'écliptique dans l'après midi du 79^{ème} jour de l'année, c'est-à-dire le 20 mars. Ce jour là, les écarts sont inférieurs à un degré.

En bas à gauche, les résultats sont comparés au moment du solstice d'été (le 21 juin est le 172^{ème} jour de l'année). Les maxima des courbes sont légèrement décalés ; toutes, sauf celle de Spencer, ont des maxima inférieurs à 23.45° et les écarts sont de l'ordre de 0.02°.

⁵ "Les anomalies, l'équation de Kepler, la position du soleil", B. Beckers & P. Beckers, Rapport Helio_006_fr, 2010, www.heliodon.net

En bas à droite, on voit les détails relatifs au 21 septembre (264^{ème} jour). On observe que la traversée de l'écliptique a lieu le 23 septembre. Les écarts entre les solutions sont relativement importants.

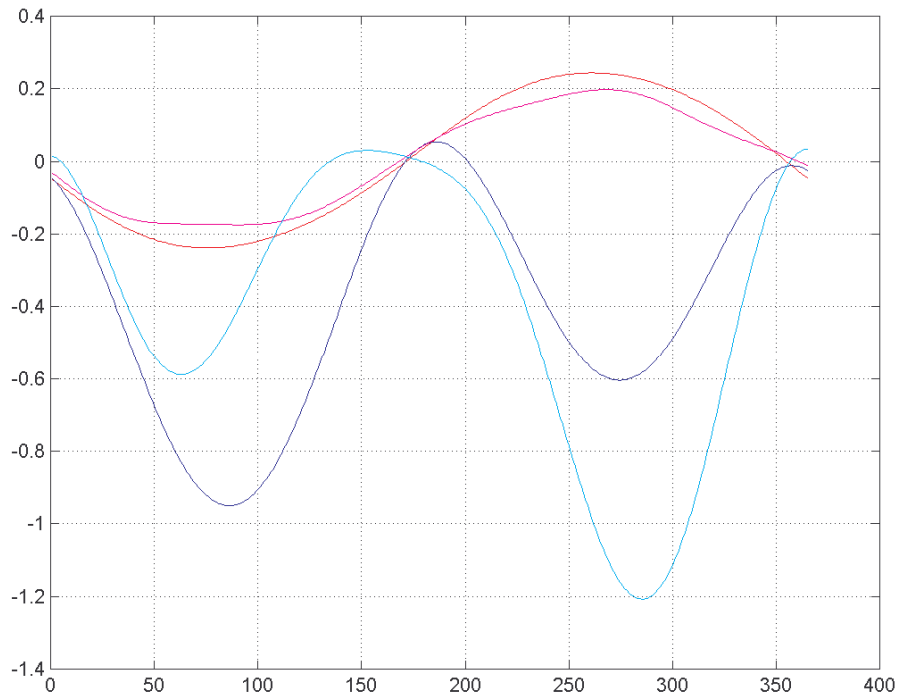


Figure 2 : Différences entre :
Campbell et exacte (rouge), Spencer et exacte (magenta), circulaire et exacte (bleu), Fletcher et exacte (cyan)

Les différences entre les cinq résultats sont toujours inférieures à un degré, sauf pour la méthode de Fletcher. Vu leur faible coût, nous conseillons d'utiliser les méthodes de Campbell ou de Spencer. En annexe, on trouvera également une table de référence présentant les déclinaisons pour une année.

Les procédures Matlab[®] données ci-dessous peuvent être utilisées telle quelles pour effectuer des calculs et produire les deux figures précédentes.

```

Comparison_declinations.m

clear; myear =[31 28 31 30 31 30 31 31 30 31 30 31];
% Circular & Campbell - Campbell notations
for J=1:365 % J = calendar day
    dec_h_deg(J)=(asin(sin(23.45*pi/180)*sin((360./365 *J-81)*pi/180)))*180/pi; % declination
for circular orbit
    dec_H_deg(J)=23.45*sin( 360./365. *(284+J) *pi/180); % declination for circular orbit
Fletcher 2007
    sindec_C= 0.39785*sin((278.97+0.9856*J+1.9165*sin((356.6+0.9856*J)*pi/180))*pi/180); %
Campbell formula 11.2
    dec_C = asin(sindec_C); dec_C_deg(J)=dec_C*180/pi;
    g=2*pi/365*(J-1); % from Spencer 1971 Fourier series representation of the position of the sun
    dec_S_deg(J)=180/pi*(.006918-.399912*cos(g)+.070257*sin(g)-.006758*cos(2*g)+.000907*sin(2*g)-
    .002697*cos(3*g)+.00148*sin(3*g));
end;
% Exact solution i.e. using time equation, see "Rapport Helio_006_fr" (heliodon.net)
Month=1; Y= 2010; D=0; % Starting on 1 of January 2010
for i = 1:365;
D=D+1;
if D >myear(Month);
D=1; Month=Month+1;
end;
d = 367*Y-floor((7*(Y+floor((Month+9)/12)))/4)+floor((275*Month)/9)+D-730530; % Julian day
w = 282.9404 + ((4.70935)*10^(-5)) *d ; % in degrees
e = 0.016709 - 1.151* 10^(-9)* d;
a = 1;

```

```

M = 356.0470 + 0.9856002585* d -floor((356.0470 + 0.9856002585* d)/360)*360;
L = w+M -floor((w+M)/360)*360;
obl = 23.4393 - 3.563* 10^(-7)* d;
M_rad = M*pi/180;
% Eccentric Anomaly [rad] - solve the Kepler equation
E_rad = solve_Kepler(M_rad, e);
% True Anomaly [rad]. We compute the position components to use
% the atan2 Matlab function, formula 19 of "Helio_006_fr"
cov = (cos(E_rad)-e)/(1-e*cos(E_rad));
siv = sqrt(1-e^2)*sin(E_rad)/(1-e*cos(E_rad));
xv = cov*a*(1-e*cos(E_rad));
yv = siv*a*(1-e*cos(E_rad));
r = sqrt(xv*xv+yv*yv);
v = atan2(siv,cov);
v_deg = v*180/pi;
lon = v_deg + w-floor((v_deg+w)/360)*360;
x = r*cos(lon*pi/180); y = r*sin(lon*pi/180);
% Equatorial coordinates
xeq = x; yeq = y*cos(obl*pi/180); zeq = y*sin(obl*pi/180);
% Sun declination
dec_e_deg(i)=(atan2(zeq,sqrt(xeq^2+yeq^2)))*180/pi;
end

figure;
dia = 1:365;
plot (dia,dec_e_deg,'k');hold on;
plot (dia,dec_h_deg,'b');hold on;
plot (dia,dec_C_deg,'r');hold on;
plot (dia,dec_S_deg,'m');hold on;
plot (dia,dec_H_deg,'c');hold on;grid on;
print -dpng the5decl.png;
% axis([78 81 -1 .0]); print -dpng z_21mars.png;
% axis([171 174 23.4 23.5]); print -dpng z_21juin.png;
% axis([264 267 -0.5 0.5]); print -dpng z_21sept.png;

figure;
plot (dia,(dec_C_deg-dec_e_deg),'r');hold on;grid on;
plot (dia,(dec_h_deg-dec_e_deg),'b');hold on;grid on;
plot (dia,(dec_S_deg-dec_e_deg),'m');hold on;grid on;
plot (dia,(dec_H_deg-dec_e_deg),'c');hold on;grid on;
print -dpng decl_comp.png;

```

La fonction qui suit effectue les itérations conduisant à la solution de l'équation de Kepler.

```

Solve_Kepler.m

% solve_Kepler
% Inputs: mean anomaly (in radians)
%          eccentricity
% Outputs: eccentric anomaly (in radians)
%
% This function solves Kepler's Equation for eccentric anomaly, given mean anomaly
% and eccentricity of the ellipse. It outputs a value of E between 0 and 2*pi.
% It utilizes a fixed-point iterative method to reach the solution.
%
% Kepler equation:  $M = E - e \sin(E)$ 
%
function [E] = solve_Kepler(M, e)
tol = 1.e-09; breakflag = 0; E1 = M;
while breakflag == 0
    % Fixed-point iterative version of Kepler's Equation
    E = M + e*sin(E1);
    % Break loop if tolerance is achieved
    if abs(E - E1) < tol; breakflag = 1; end
    E1 = E;
end
% Format the answer so that it is between 0 and 2*pi
while E > (2*pi)
    E = E - 2*pi;
end
while E < 0
    E = E + 2*pi;
end
end

```

Annexe

On trouve dans les almanachs et sur différents sites Internet des tables fournissant les valeurs de la déclinaison du soleil pour chaque jour de l'année. En voici un exemple ci-dessous⁶.

Table of the Declination of the Sun

Mean Value for the Four Years of a Leap-Year Cycle

Positive sign (+) Sun north of Celestial Equator; negative sign (-) Sun south of Celestial Equator.

| Day | JAN | FEB | MAR | APR | MAY | JUN | JUL | AUG | SEP | OCT | NOV | DEC |
|-----|---------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|---------|---------|
| 1 | -23°04' | -17°20' | -7°49' | +4°18' | +14°54' | +21°58' | +23°09' | +18°10' | +8°30' | -2°57' | -14°14' | -21°43' |
| 2 | -22°59' | -17°03' | -7°26' | +4°42' | +15°12' | +22°06' | +23°05' | +17°55' | +8°09' | -3°20' | -14°34' | -21°52' |
| 3 | -22°54' | -16°46' | -7°03' | +5°05' | +15°30' | +22°14' | +23°01' | +17°40' | +7°47' | -3°44' | -14°53' | -22°01' |
| 4 | -22°48' | -16°28' | -6°40' | +5°28' | +15°47' | +22°22' | +22°56' | +17°24' | +7°25' | -4°07' | -15°11' | -22°10' |
| 5 | -22°42' | -16°10' | -6°17' | +5°51' | +16°05' | +22°29' | +22°51' | +17°08' | +7°03' | -4°30' | -15°30' | -22°18' |
| 6 | -22°36' | -15°52' | -5°54' | +6°13' | +16°22' | +22°35' | +22°45' | +16°52' | +6°40' | -4°53' | -15°48' | -22°25' |
| 7 | -22°28' | -15°34' | -5°30' | +6°36' | +16°39' | +22°42' | +22°39' | +16°36' | +6°18' | -5°16' | -16°06' | -22°32' |
| 8 | -22°21' | -15°15' | -5°07' | +6°59' | +16°55' | +22°47' | +22°33' | +16°19' | +5°56' | -5°39' | -16°24' | -22°39' |
| 9 | -22°13' | -14°56' | -4°44' | +7°21' | +17°12' | +22°53' | +22°26' | +16°02' | +5°33' | -6°02' | -16°41' | -22°46' |
| 10 | -22°05' | -14°37' | -4°20' | +7°43' | +17°27' | +22°58' | +22°19' | +15°45' | +5°10' | -6°25' | -16°58' | -22°52' |
| Day | JAN | FEB | MAR | APR | MAY | JUN | JUL | AUG | SEP | OCT | NOV | DEC |
| 11 | -21°56' | -14°18' | -3°57' | +8°07' | +17°43' | +23°02' | +22°11' | +15°27' | +4°48' | -6°48' | -17°15' | -22°57' |
| 12 | -21°47' | -13°58' | -3°33' | +8°28' | +17°59' | +23°07' | +22°04' | +15°10' | +4°25' | -7°10' | -17°32' | -23°02' |
| 13 | -21°37' | -13°38' | -3°10' | +8°50' | +18°14' | +23°11' | +21°55' | +14°52' | +4°02' | -7°32' | -17°48' | -23°07' |
| 14 | -21°27' | -13°18' | -2°46' | +9°11' | +18°29' | +23°14' | +21°46' | +14°33' | +3°39' | -7°55' | -18°04' | -23°11' |
| 15 | -21°16' | -12°58' | -2°22' | +9°33' | +18°43' | +23°17' | +21°37' | +14°15' | +3°16' | -8°18' | -18°20' | -23°14' |
| 16 | -21°06' | -12°37' | -1°59' | +9°54' | +18°58' | +23°20' | +21°28' | +13°56' | +2°53' | -8°40' | -18°35' | -23°17' |
| 17 | -20°54' | -12°16' | -1°35' | +10°16' | +19°11' | +23°22' | +21°18' | +13°37' | +2°30' | -9°02' | -18°50' | -23°20' |
| 18 | -20°42' | -11°55' | -1°11' | +10°37' | +19°25' | +23°24' | +21°08' | +13°18' | +2°06' | -9°24' | -19°05' | -23°22' |
| 19 | -20°30' | -11°34' | -0°48' | +10°58' | +19°38' | +23°25' | +20°58' | +12°59' | +1°43' | -9°45' | -19°19' | -23°24' |
| 20 | -20°18' | -11°13' | -0°24' | +11°19' | +19°51' | +23°26' | +20°47' | +12°39' | +1°20' | -10°07' | -19°33' | -23°25' |
| Day | JAN | FEB | MAR | APR | MAY | JUN | JUL | AUG | SEP | OCT | NOV | DEC |
| 21 | -20°05' | -10°52' | 0°00' | +11°39' | +20°04' | +23°26' | +20°36' | +12°19' | +0°57' | -10°29' | -19°47' | -23°26' |
| 22 | -19°52' | -10°30' | +0°24' | +12°00' | +20°16' | +23°26' | +20°24' | +11°59' | +0°33' | -10°50' | -20°00' | -23°26' |
| 23 | -19°38' | -10°08' | +0°47' | +12°20' | +20°28' | +23°26' | +20°12' | +11°39' | +0°10' | -11°12' | -20°13' | -23°26' |
| 24 | -19°24' | -9°46' | +1°11' | +12°40' | +20°39' | +23°25' | +20°00' | +11°19' | -0°14' | -11°33' | -20°26' | -23°26' |
| 25 | -19°10' | -9°24' | +1°35' | +13°00' | +20°50' | +23°24' | +19°47' | +10°58' | -0°37' | -11°54' | -20°38' | -23°25' |
| 26 | -18°55' | -9°02' | +1°58' | +13°19' | +21°01' | +23°23' | +19°34' | +10°38' | -1°00' | -12°14' | -20°50' | -23°23' |
| 27 | -18°40' | -8°39' | +2°22' | +13°38' | +21°12' | +23°21' | +19°21' | +10°17' | -1°24' | -12°35' | -21°01' | -23°21' |
| 28 | -18°25' | -8°17' | +2°45' | +13°58' | +21°22' | +23°19' | +19°08' | +9°56' | -1°47' | -12°55' | -21°12' | -23°19' |
| 29 | -18°09' | -8°03' | +3°09' | +14°16' | +21°31' | +23°16' | +18°54' | +9°35' | -2°10' | -13°15' | -21°23' | -23°16' |
| 30 | -17°53' | | +3°32' | +14°35' | +21°41' | +23°13' | +18°40' | +9°13' | -2°34' | -13°35' | -21°33' | -23°12' |
| 31 | -17°37' | | +3°55' | | +21°50' | | +18°25' | +8°52' | | -13°55' | | -23°08' |

⁶ http://www.wsanford.com/~wsanford/exo/sundials/DEC_Sun.html