

Géométrie assistée par ordinateur

Benoit Beckers

Architecture et Physique Urbaine - ISA BTP
Université de Pau et des Pays de l'Adour
Allée du Parc Montaury, 64600 Anglet (France)
benoit.beckers@univ-pau.fr, www.heliodon.net

Introduction

Ce document donne six illustrations représentatives des possibilités apportées par la simulation numérique pour la solution de problèmes de géométrie. Les exemples sont proposés dans le cadre de l'outil de simulation Matlab[®] afin de servir de guide pour une programmation utilisant d'autres environnements équivalents.

Le premier chapitre est consacré au problème élémentaire du traitement des droites et des plans. Il permet d'illustrer la notion de *forme paramétrique vectorielle*.

Dans le second chapitre, on aborde la notion plus complexe des formes polynomiales et on donne quelques exemples pour en montrer la puissance.

Le troisième chapitre est consacré à la sphère, aux notions d'angles solides et aux formules de la trigonométrie sphérique.

En application des chapitres sur la sphère et sur les segments de droites et dans le cadre des méthodes de Monte Carlo, on aborde dans le chapitre quatre le problème des techniques de lancer de rayons et de leur homogénéité spatiale. Dans ce chapitre et dans le suivant, on est en présence de méthodes purement numériques, sans équivalent analytique.

Le chapitre cinq fournit un début d'approche des techniques de modélisation des objets tridimensionnels avec la méthode de génération de maillages de Delaunay.

Le sixième et dernier chapitre est consacré aux représentations d'objets sphériques et de trajectoires définies sur la sphère telles que les trajets solaires.

Dans chaque chapitre, un exercice typique est proposé. Sa mise en œuvre devrait aider à prendre conscience des avantages et des difficultés de ces problèmes.

1. Droites et plans

A deux dimensions

Comment représenter informatiquement une droite, ou plutôt un segment de droite, de manière à aborder les simulations numériques (principalement graphiques) de la manière la plus efficace possible ?

On distingue quatre formes principales pour représenter une droite dans le plan : la forme *implicite* ou canonique, la forme *explicite*, la forme *perpendiculaire* et la forme *paramétrique vectorielle*.

$$\begin{aligned} \textit{implicite} & : ax + by + c = 0 \\ \textit{explicite} & : y = mx + n \\ \textit{perpendiculaire} & : W = [x_w \quad y_w] \Rightarrow [r_w \quad \theta_w] \\ \textit{paramétrique} & : R(t) = A + t \vec{b} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Les deux premières formulations sont classiques ; la droite infinie y est représentée par deux nombres.

La troisième définition est peu connue. Comme la représentation d'une droite par le pied de sa perpendiculaire abaissée de l'origine conduit aussi à une formulation compacte basée sur deux nombres, cette formulation peut s'avérer extrêmement efficace, d'autant plus qu'elle s'étend directement à la troisième dimension, un plan étant alors défini par la droite qui porte sa distance à l'origine (voir plus loin).

La définition paramétrique fait appel à de nouvelles notions : celle de forme vectorielle, et celle de forme paramétrique. Elle donne aussi la possibilité de travailler avec un segment limité dans l'espace.

Pour la valeur du paramètre $t = 0$, on se trouve au point A , tandis que pour $t = 1$, on est au point $A + \vec{b}$. L'introduction du segment de droite se fait de manière très naturelle selon la quatrième relation de (1.1). Cette équation peut être écrite de manière explicite avec $[x_0, y_0]$ les coordonnées de A et $[x_1, y_1]$ celles de $A + \vec{b}$:

$$\begin{aligned} x & = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y & = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{aligned} \rightarrow R = A + t \vec{b} \quad (1.2)$$

En réarrangeant en fonction des coordonnées, on obtient une forme différente :

$$\begin{aligned} x & = x_0(1-t) + x_1 t \\ y & = y_0(1-t) + y_1 t \end{aligned} \rightarrow R = P_0(1-t) + P_1 t \quad (1.3)$$

L'expression (1.3) est appelée *définition géométrique* car les points y apparaissent explicitement, alors que l'expression (1.2) est appelée *définition algébrique* car les formes polynomiales y apparaissent explicitement sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \alpha_1 t \\ y &= \beta_0 + \beta_1 t \end{aligned} \rightarrow R = A + \vec{b}t \quad (1.4)$$

Pour les droites, il est facile de passer d'une représentation à l'autre, car les équations sont linéaires. Par exemple, pour le passage de la forme paramétrique à la forme implicite il faut éliminer t entre les deux équations :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y &= y_0 + (y_1 - y_0)t \end{aligned} \quad (1.5)$$

De la première relation, on tire :

$$t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \text{ avec la condition : } x_1 - x_0 \neq 0 \quad (1.6)$$

En remplaçant dans la deuxième :

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0 \quad \text{voir } (y = mx + n) \quad (1.7)$$

On peut aussi l'écrire :

$$\begin{aligned} (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + (y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)) &= 0 \\ \text{voir : } ax + by + c &= 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pour toutes les représentations, sauf la dernière, la droite est définie par deux entités : a / c et b / c pour la première, m et n pour la seconde et W ou r, θ en coordonnées polaires pour la troisième. En coordonnées polaires, on voit apparaître explicitement, le terme de distance du pied de la perpendiculaire à l'origine.

Le passage de la forme perpendiculaire de (1.1) à la forme paramétrique s'effectue simplement en exprimant que le vecteur du second terme de (1.2) est le produit vectoriel du point par la normale au plan horizontal :

$$R(t) = W + t \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array} \times \frac{W}{|W|} \right]_{\text{composantes 1 et 2}} \quad (1.9)$$

Pour la définition et l'utilisation des courbes, le principe reste le même, mais les équations sont non linéaires. La deuxième et la troisième définition de (1.1) ne sont évidemment plus pertinentes.

A trois dimensions

A trois dimensions, pour représenter un plan, on distingue trois formes principales : la forme *implicite* ou canonique, la forme *perpendiculaire à l'origine* et la forme *paramétrique vectorielle*.

$$\begin{aligned} \textit{implicite} & : ax + by + cz + d = 0 \\ \textit{paramétrique} & : P(u, v) = A + u\vec{b} + v\vec{c} \\ \textit{perpendiculaire} & : W = \begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Les deux premières formes sont classiques, mais la troisième, très compacte, est beaucoup moins courante. Elle consiste à représenter le plan par le pied de sa perpendiculaire à l'origine.

Comme à deux dimensions, on peut facilement passer de la forme *paramétrique* à la forme *implicite* en éliminant les paramètres u et v entre les trois composantes du point $P(u, v)$.

En 3D, l'élimination de t entre les trois équations de la forme paramétrique restitue deux équations en (x, y, z) qui définissent la droite.

$$\begin{aligned} x & = x_0(1-t) + x_1 t \\ y & = y_0(1-t) + y_1 t \\ z & = z_0(1-t) + z_1 t \end{aligned} \quad (1.11)$$

Une droite est définie par deux équations linéaires : c'est l'intersection de deux plans.

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d & = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Les deux fonctions polynomiales $(1 - t)$ et t sont appelées fonctions de forme, de mélange ou de pondération, (*shape, blending* or *weight* functions), respectivement, en optimisation, en CAO et en éléments finis. Pour une droite, ce concept semble artificiel, mais on en verra tout l'intérêt dans le cas des polynômes de degré plus élevé.

On notera que la relation (1.11) est une *combinaison barycentrique* (ou *partition de l'unité*), ce qui implique que la somme des coefficients soit égale à 1 :

$$f_1(t) + f_2(t) = 1 - t + t = 1 \quad (1.13)$$

Pour introduire la troisième forme de définition de la relation (1.10), on peut partir de la définition du plan passant par trois points P, Q, R . De là, il est trivial de passer à la représentation paramétrique : $P + (P - Q)u + (P - R)v$ (ligne 1 de la Table 1). A partir de cette expression, on calcule aisément la normale au plan (ligne 4) par le point origine S . La normale $(S + nt)$ a pour point de percée W (lignes 5 à 8). Les deux paramètres u et v du plan et le paramètre t de la droite sont la solution du système d'équations linéaires de matrice M (ligne 5) et de second membre sm (ligne 6). On en déduit les valeurs des paramètres u, v et t rangés dans le vecteur uvt (ligne 7). Le point de percée W de la normale issue de S est obtenu à la ligne 8. Il correspond à la troisième forme (1.10) de représentation du plan.

Les *lignes 9 à 18* servent à réaliser le dessin de la *Figure 1*. Les *lignes 12 à 14* ainsi que les *lignes 16 à 18* ne sont pas nécessaires mais elles rendent plus intelligible la représentation 3D. On notera l'utilisation des couleurs rouge, vert et bleu (R, G, B) pour la représentation des axes de coordonnées x, y et z .

En exécutant la procédure de la *Table 1*, on obtient le résultat $W = [1 \ 1 \ 2]$.

Inversement, quand on appelle la fonction de la *Table 2*, avec la donnée $W = [1 \ 1 \ 2]$, on obtient les trois coordonnées non nulles des points $P, Q, R : 6, 6$ et 3 . L'appel à cette procédure permet de définir le plan par ses intersections avec les trois axes de coordonnées. Il peut être effectué avec la ligne de commande de Matlab[®] : `T02([1 1 2])`.

```

1 P = [6 0 0];Q = [0 6 0];R = [0 0 3]; % Plan par 3 points
2 T = [P;Q;R;P]; % Répétition du premier point pour le tracé
3 S = [0 0 0]; % Origine des coordonnées
4 n = cross(P-Q,P-R)/norm(cross(P-Q,P-R)); % Normale au plan
5 M = [(Q-P)' (R-P)' -n']; % Matrice du système linéaire à résoudre
6 sm = (S-P)'; % Second membre du système linéaire à résoudre
7 uvt = M\sm; % Solution du système: 2 param. du plan et celui de la droite
8 W = S + n*uvt(3); % Point de percée de la normale dans le plan
9 figure;set(gca,'fontsize',12) % Représentation des résultats
10 plot3(T(:,1),T(:,2),T(:,3),'LineWidth',1.5,'color','k');hold on;
11 plot3([W(1) S(1)],[W(2) S(2)],[W(3) S(3)'],'LineWidth',1.5,'color','r');
12 plot3([W(1) P(1)],[W(2) P(2)],[W(3) P(3)'],'--b');hold on;
13 plot3([W(1) Q(1)],[W(2) Q(2)],[W(3) Q(3)'],'--b');hold on;
14 plot3([W(1) R(1)],[W(2) R(2)],[W(3) R(3)'],'--b');hold on;
15 plot3(W(1),W(2),W(3),'r','MarkerSize',20);hold on;grid on;axis equal;
16 la=2;plot3([0 la],[0 0],[0 0],'r','LineWidth',2);hold on;% Drawing axes
17 plot3([0 0],[0 la],[0 0],'g','LineWidth',2);hold on;
18 plot3([0.02 0.02],[0.02 0.02],[0 la],'b','LineWidth',2);hold on;

```

Table 1 : Procédure Matlab[®] : plan défini par trois points → plan défini par pied de perpendiculaire

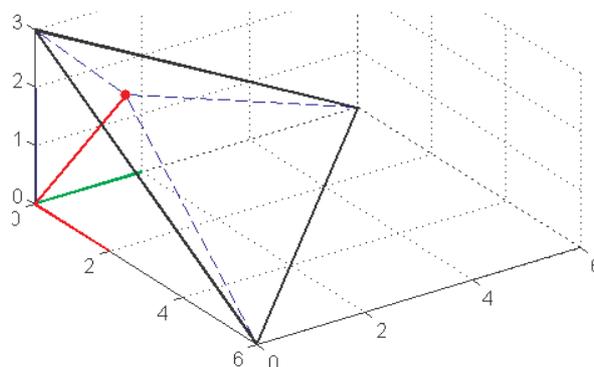


Figure 1 : Perpendiculaire à un plan défini par ses intersections avec les trois axes de coordonnées

```

1 function [xyz] = T02(W)
2 d = [1 0 0;0 1 0;0 0 1]; % Directions des 3 axes
3 co = zeros(3,3);
4 if norm(W) == 0;W(3)=0.00001;end% Distance origine = 0 : décaler légèrement
5 for i = 1:3 % Boucle sur les 3 axes
6 p = dot(d(i,:),W)/norm(W);
7 if norm(p) > 0;t = (norm(W))/p ;else t = 10000;end
8 co(i,:) = d(i,:)*t;
9 end
10 xyz = [co(1,1) co(2,2) co(3,3)];
11 end

```

Table 2 : Fonction Matlab[®] pour le calcul de l'intersection d'un plan et des trois axes de coordonnées

La fonction de la [Table 2](#) ne s'applique qu'à des points différents de l'origine. A la [ligne 4](#) de la fonction, si le plan passe par l'origine, donc si $W = 0$, on lève l'indétermination en fixant arbitrairement à une valeur faible la composante de la normale dans la direction de l'axe des z .

A la [ligne 6](#), on calcule l'intersection de chacun des axes (tableau d , 3×3) avec le plan. La variable p représente la longueur de la projection de l'axe sur la normale. Le paramètre sur la droite est calculé à la [ligne 7](#) en tenant compte du fait que le plan peut couper l'axe à l'infini. Le point recherché sur l'axe i est défini à la [ligne 8](#).

Lorsqu'une enceinte définie par les plans infinis qui la limitent est créée au moyen des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine, se pose le problème de sa représentation. La procédure Matlab[®] de la [Table 3](#) est applicable à toute enceinte hexaédrique. Le résultat de cette procédure est illustré à la [Figure 2](#).

```

1 clear all;clc % Procédure applicable à un hexaèdre
2 fa = [-1 0 0;0 -1 0;1 0 0;0 1 0;0 0 -1;0 0 1]; % 6 plans limit. hexaèdre
3 so = [1 2 5;2 3 5;3 4 5;4 1 5;1 2 6;2 3 6;3 4 6;4 1 6]; % 8 sommets hexa.
4 F = zeros(6,3);S=zeros(8,3);
5 for k = 1:6;F(k,:) = T02(fa(k,:));end % Intersections plans limites - axes
6 for v = 1:8 % Boucle pour calcul des 8 sommets de l'hexaèdre
7     M = zeros(3,3);
8     for i = 1:3 % Boucle sur les lignes du système 3 x 3 à résoudre
9         for j =1:3 % Boucle sur les colonnes de la matrice M
10            if F(so(v,i),j) < 10000;M(i,j)= -1/F(so(v,i),j);end
11        end
12    end
13    S(v,:) = M\-[1 1 1]'; % S contient les coordonnées du sommet v
14 end
15 figure % Dessin de l'hexaèdre : plancher, plafond et arêtes les liant
16 plot3([S(1:4,1);S(1,1)],[S(1:4,2);S(1,2)],[S(1:4,3);S(1,3)]);hold on
17 plot3([S(5:8,1);S(5,1)],[S(5:8,2);S(5,2)],[S(5:8,3);S(5,3)]);hold on
18 for i=1:4
19     plot3([S(i,1);S(i+4,1)],[S(i,2);S(i+4,2)],[S(i,3);S(i+4,3)]);hold on
20 end
21 la = min(norm(S(:,1)))/4;
22 plot3([0 la],[0 0],[0 0],'r','LineWidth',2) % Dessin des axes x-r,y-g,z-b
23 plot3([0 0],[0 la],[0 0],'g','LineWidth',2)
24 plot3([0 0],[0 0],[0 la],'b','LineWidth',2);axis equal;grid on;

```

Table 3 : Procédure Matlab[®] pour le dessin d'un hexaèdre défini par ses faces

L'enceinte est donnée par les six faces de la matrice de points fa de dimension 6×3 ([ligne 2](#)). A la [ligne 3](#), on exprime que chaque sommet (*matrice so*) de l'hexaèdre est l'intersection de 3 faces, par exemple le premier correspond aux faces 1, 2 et 5 de la matrice fa . La matrice so est de dimension 8×3 . A la [ligne 5](#), on calcule les coordonnées à l'origine des six faces de l'enceinte en appelant la fonction $T02$ de la [Table 2](#) dans la matrice F , de dimensions 6×3 . On calcule l'intersection des trois plans en les exprimant sous forme implicite (première ligne de (1.10)). L'intersection de trois faces données chacune par leurs trois coordonnées à l'origine est réalisée par solution du système linéaire dont la matrice M des coefficients est de dimension 3×3 . M est calculée à la [ligne 10](#) et le système est résolu à la [ligne 13](#).

Exercices proposés

Calculer l'intersection de deux droites données sous une des formes précitées.
Par un point, calculer la perpendiculaire à une droite.

Par un point, mener la parallèle à une droite.
 Calculer la distance entre deux droites parallèles.
 Calculer le barycentre d'un segment de droite.
 Intersection de 2 segments de droites.
 Par un point, calculer la perpendiculaire à un plan.
 Par un point, mener un plan parallèle à un plan.
 Calculer la distance entre deux plans parallèles.
 En 2D, tracer deux droites faisant un angle donné.
 Calculer la distance entre un point et un plan.
 Tracer la perpendiculaire commune à deux droites gauches.

Exercice n° 1 : Soit un hexaèdre donné par les pieds des six perpendiculaires abaissées de l'origine sur ses six faces. Calculer ses huit sommets et le dessiner. Dans une seconde étape, décomposer l'hexaèdre en cinq tétraèdres et calculer son volume.

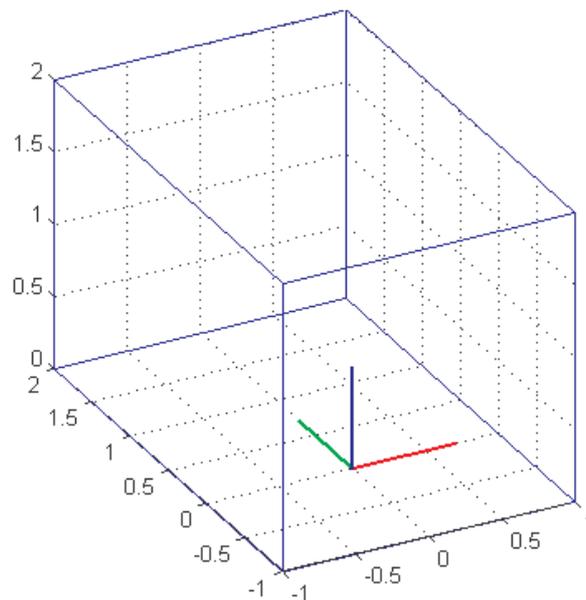


Figure 2 : Hexaèdre régulier

2. Courbes et surfaces polynomiales paramétriques

Forme générale des courbes paramétriques

On peut généraliser la définition du segment de droite à tout segment de courbe en écrivant :

$$P = \sum_{i=1}^n f_i(t) P_i \text{ avec la condition : } \sum_{i=1}^n f_i(t) = 1 \quad (2.1)$$

Cette expression est la forme générale des courbes qui s'appuient sur des points (forme géométrique). Les fonctions de forme doivent vérifier la condition de partition de l'unité (tout point de la courbe est une combinaison barycentrique des points d'appui). Pour changer la forme d'une courbe, il suffit de déplacer un ou plusieurs points, ce qui se révèle très pratique lorsque l'opération est effectuée dans une interface graphique de CAO. Les formulations de Bézier, des B-splines ou des NURBS font partie de cette démarche. Dans les deux premières formulations, les fonctions de mélange sont des polynômes ; dans la troisième, ce sont des fonctions rationnelles. [Coons 1967, 1977, Bézier 1982, 1986, Casteljau 1985, Farin 2002, Townsend 2015]

Les galeries murmurantes

“Whispering-gallery waves were first explained for the case of St Paul's Cathedral circa 1878 by Lord Rayleigh [Rayleigh 1910]. He explained the phenomenon of travelling whispers with a series of specularly reflected sound rays making up chords of the circular gallery. Clinging to the walls the sound should decay in intensity only as the inverse of the distance — rather than the inverse square as in the case of a point source of sound radiating in all directions. This accounts for the whispers being audible all round the gallery.

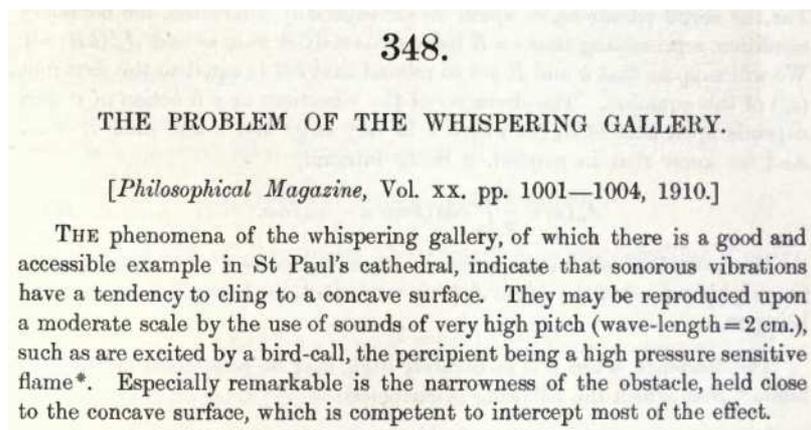


Figure 3 : Début de la publication de Rayleigh, 1910

Many other monuments have been shown to exhibit whispering-gallery waves, such as the Gol Gumbaz in Bijapur and the Temple of Heaven in Beijing.

Whispering-gallery waves are guided by the effect of the wall curvature; they are more efficiently guided in spheres than in cylinders because the effects of acoustic diffraction (lateral wave spreading) are then completely compensated.”

https://en.wikipedia.org/wiki/Whispering-gallery_wave

Les coniques

Les courbes planes du second degré (les *coniques*) sont à la base du calcul des trajectoires des corps célestes dans la théorie de Kepler. En général, elles sont présentées sous leur forme canonique.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ex + f = 0 \quad (2.2)$$

En se rapportant à son centre (x_0, y_0) , le cercle est défini par :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (2.3)$$

En développant l'expression (2.3), on retrouve bien une expression de type (2.2).

Pour l'utilisation des coniques, il est souvent avantageux d'utiliser les coordonnées polaires (ρ, θ) . En rapportant une conique à l'un des ses foyers ou à son unique foyer, on obtient une expression compacte, qui ne dépend que de deux paramètres indépendants. Les constantes β et e désignent respectivement le *périgée* (point de la courbe le plus proche de l'origine) et l'*excentricité* de la conique. Le terme $(\theta - \theta_0) = \nu$ est appelé *anomalie vraie*.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{\beta(1 + e)} \quad (2.4)$$

Pour un cercle, $e = 0$, l'équation précédente exprime simplement que la distance à l'origine est une constante égale à β . Le dénominateur $\beta(1 + e) = p$ est appelé *paramètre de la conique*. En transformant (2.4) en coordonnées cartésiennes, on obtient l'équation de la conique rapportée à un foyer :

$$(1 - e^2).x^2 + y^2 + 2epx - p^2 = 0 \quad (2.5)$$

La normale à une courbe est obtenue à partir du gradient de la fonction au point considéré. Dans le cas de la forme (2.5), on obtient le terme de droite de (2.6).

$$\vec{n} = - \left[\begin{array}{c} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} \\ \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -2(1 - e^2)x - 2ep \\ -2y \end{array} \right] \quad (2.6)$$

Pour illustrer l'utilisation de ces formulations de courbes, nous allons faire un calcul de réflexion spéculaire dans une enceinte elliptique. Dans la réflexion spéculaire, lorsque le rayon

atteint une paroi, il s’y réfléchit en suivant la loi de Snell-Descartes : l’angle d’incidence est égal à l’angle de réflexion. On suppose également que le rayon conserve son intensité.

Dans les quatre figures suivantes, on calcule d’abord une seule réflexion et son point de contact. Ensuite on suit le rayon et on trouve un second point de contact et ainsi de suite. Pour un rayon issu d’un foyer, on a affiché, à la suite des quatre dessins, les cinq premiers points de contact. On observe qu’après quelques réflexions, le rayon tend à suivre un trajet direct entre les deux foyers de l’ellipse.

Pour obtenir les trajets des rayons, la principale opération est le calcul du rayon réfléchi sur une courbe exprimée sous sa forme canonique. Cette opération est illustrée dans la fonction Matlab[®] de la *Table 4*.

```

1  function [res] = reflection(e,r1,p,p1)
2  n      = [-2*(1-e^2)*r1(1)-2*e*p -2*r1(2) 0];           % Normale à la courbe
3  t      = cross(-n,[0 0 1]);                             % Tangente à la courbe
4  inc    = [p1 0];                                       % Rayon incident en 3D
5  ref    = t/norm(t)*dot(inc,t/norm(t))-n/norm(n)*dot(inc,n/norm(n));
6  ref    = ref/norm(ref);                                 % Rayon réfléchi unitaire
7  a1     = (1-e^2)*ref(1)^2+ref(2)^2;% Coeff. de l'équation à résoudre en s2
8  a2     = (1-e^2)*2*ref(1)*r1(1)+2*r1(2)*ref(2)+2*e*p*ref(1); % coeff en s
9  a3     = (1-e^2)*r1(1)^2+r1(2)^2+2*e*p*r1(1)-p^2;     % Terme indépendant
10 s      = (-a2+sqrt(a2^2-a1*a3))/(2*a1);                % Calcul du paramètre s
11 r2     = r1 + s * [ref(1) ref(2)];                     % Nouveau point de contact
12 plot (r2(1),r2(2),'.b','MarkerSize',15);hold on;     % Marque sur le contact
13 plot ([r1(1) r2(1)], [r1(2) r2(2)],'b');hold on;     % Dessin du rayon
14 res    = [r2(1) r2(2);ref(1) ref(2)]; % Transf. résultat vers proc. princ.
15 end

```

Table 4 : Fonction Matlab[®] pour le calcul d’un rayon réfléchi

Les arguments de la fonction sont : l’excentricité de la conique, le point de contact et la direction du rayon incident, et le paramètre de la conique. Le résultat est mémorisé dans la matrice *res* dont la première ligne est le nouveau point de contact et la seconde la direction du rayon réfléchi.

A partir des relations (2.5) et (2.10), on calcule la normale à la courbe à la *ligne 2*. La tangente est calculée à la *ligne 3* par produit vectoriel. Les composantes du rayon réfléchi sont calculées en exprimant qu’il a la même composante selon la tangente à la courbe que le rayon incident et une composante selon la normale à la courbe qui est de signe opposé à celle du rayon incident (*ligne 5*).

Le calcul de l’intersection du rayon réfléchi et de l’enceinte s’effectue en résolvant l’équation du second degré dont les coefficients sont donnés aux *lignes 7 à 9* et la solution valide à la *ligne 10*. Le nouveau point de contact est calculé à la *ligne 11*.

Les *lignes 12 à 14* donnent le dessin du nouveau rayon et restituent le résultat à la procédure principale.

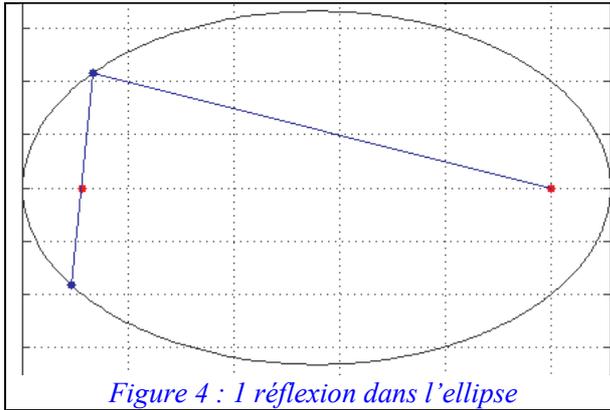


Figure 4 : 1 réflexion dans l'ellipse

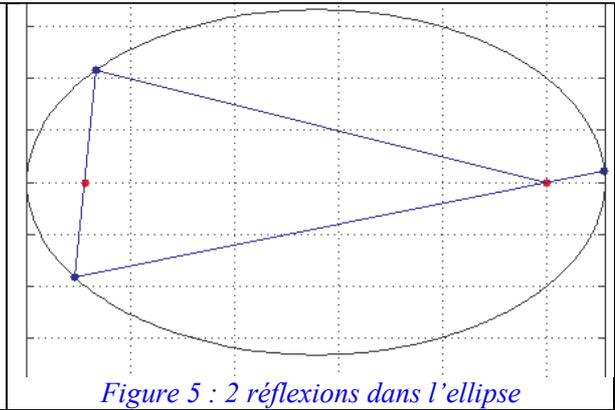


Figure 5 : 2 réflexions dans l'ellipse

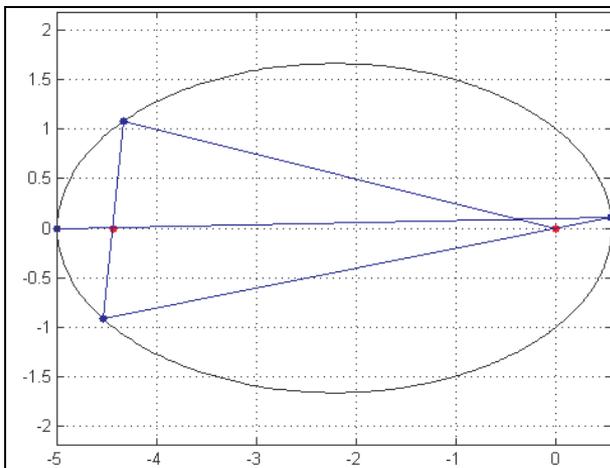


Figure 6 : 3 réflexions dans l'ellipse

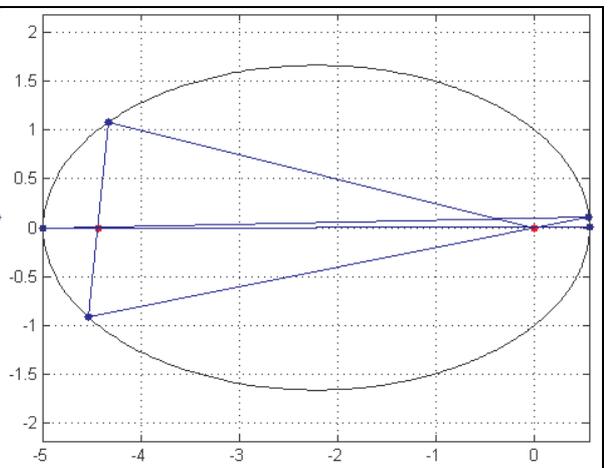


Figure 7 : 4 réflexions dans l'ellipse

Point de contact 1 =	-4.3332	1.0833
Point de contact 2 =	-4.5389	-0.91961
Point de contact 3 =	0.54935	0.1113
Point de contact 4 =	-4.9999	-0.012381
Point de contact 5 =	0.55555	0.0013757

La procédure de la *Table 5* permet d'introduire les données (*lignes 1 à 7*), elle donne les relations entre différentes grandeurs d'une conique (*lignes 8 à 12*) et initialise le processus de réflexions en lançant le rayon de départ jusqu'au point de contact (*lignes 13 à 18*). La suite de la procédure (*lignes 19 à 28*) est consacrée à la visualisation des résultats. Les *lignes 29 à 32* concernent le calcul des réflexions. Quand la source est placée ailleurs qu'en un des foyers, on obtient, une grande variété de solutions.

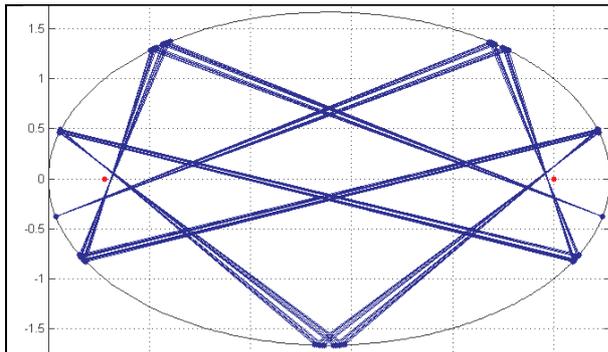


Figure 8 : Direction du rayon [-4 1], position de la source [-3 0], 100 réflexions

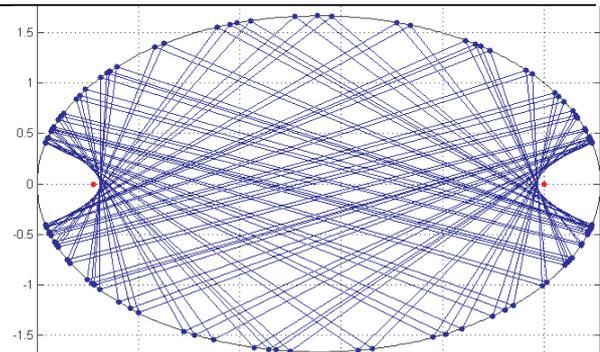


Figure 9 : Direction du rayon [-4 1], position de la source [-2.25 0], 100 réflexions

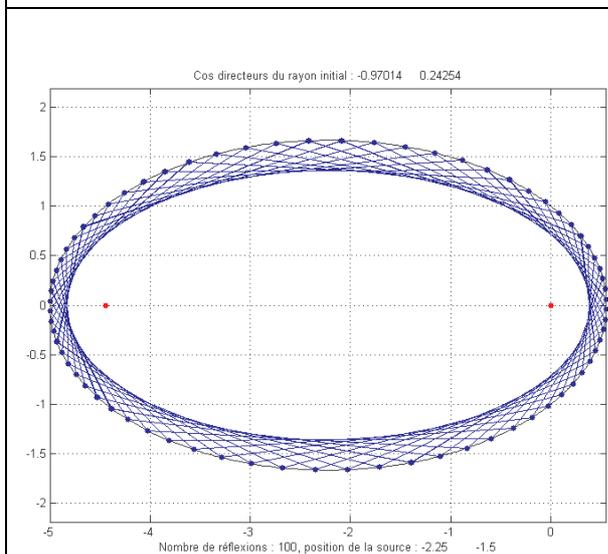


Figure 10 : Direction du rayon [-4 1], position de la source [-2.25 -1.5], 100 réflexions

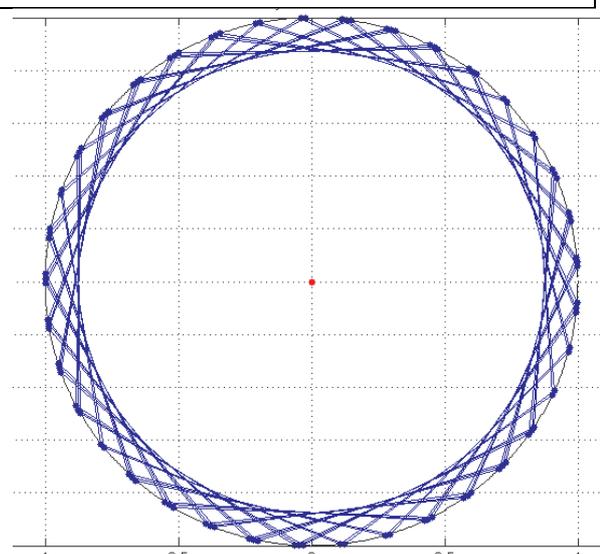


Figure 11 : Direction du rayon [-4 1], position de la source [0 -0.9], 100 réflexions, $e = 0$

```

1 clear; clc % fonction clc utilisé pour réinitialiser l'écran
2 nr = 100; disp([' Nombre de réflexions : ', num2str(nr)])
3 e = 0.8; % Excentricité
4 k2 = 1; % Carré du moment cinétique
5 S = [-2.25 -1.5]; % Définition de la source d'où est issu le rayon
6 dx = -4; dy = 1; % Direction du rayon initial issu de la source S
7 v = (1:5:360)*pi/180; % discrét. anomalie vraie ===== fin des données
8 beta = k2/(1+e); % Autres grandeurs dérivées de la conique Périgée
9 alpha = k2/(1-e); % Apogée
10 par = beta*(1+e); % Paramètre de la conique
11 a = (alpha + beta) / 2; % Demi grand axe
12 b = sqrt(alpha*beta); % Demi petit axe
13 p1 = [dx dy]/norm([dx dy]); % Traitement du test: Cos directeurs du rayon
14 a1 = (1-e^2)*p1(1)^2+p1(2)^2; % Coeff. de l'équation à résoudre en t2
15 a2 = (1-e^2)*p1(1)*S(1)+p1(2)*S(2)+p1(1)*e*par; % demi coeff en t
16 a3 = (1-e^2)*S(1)^2+S(2)^2+2*e*par*S(1)-par^2; % Terme indépendant
17 t = (-a2 + sqrt(a2^2-a1*a3))/a1; % Sol. de l'équation pour le param. t
18 r1 = S + t*p1; % Point d'intersection avec la courbe du second degré
19 res = [r1; p1]; % Argument initial de la fonction reflection

```

```

20 x = k2./(1 + e * cos (v)).*cos(v); % Coord. x des points de l'ellipse
21 y = k2./(1 + e * cos (v)).*sin(v); % Coord. y des points de l'ellipse
22 figure
23 plot (0, 0, '.r', 'MarkerSize',15);hold on;% 1er foyer = centre d'attraction
24 plot (-2*(a-beta), 0, '.r', 'MarkerSize',15);hold on; % Second foyer
25 plot (x,y, 'k');axis equal;grid on;hold on;%axis off; % Dessin de l'ellipse
26 plot (r1(1),r1(2), '.b', 'MarkerSize',15);hold on; % Marque sur le contact
27 plot ([S(1) r1(1)], [S(2) r1(2)], 'b');hold on; % Dessin du rayon
28 % disp([' Point de contact = ',num2str(r1)])
29 for i = 1:nr; % Calcul des rayons réfléchés
30 [res] = T04(e,res(1,:),par,res(2,:));
31 % disp([' Point de contact = ',num2str(res(1,:))])
32 end
33 xlabel(['Cos directeurs du rayon initial : ',num2str(p1)]);hold on
34 title(['Nombre de réflexions : ',num2str(nr),', e = ',num2str(e),...
35 ', position de la source : ',num2str(S)]);hold on;

```

Table 5 : Procédure Matlab[®] de calcul de réflexions dans une enceinte elliptique ou circulaire

Carreau de Coons

En 3D, le maillage d'une surface non plane peut être réalisé avec des éléments triangulaires à bords droits, donc forcément plans. On souhaite souvent remplacer les paires de triangles par des quadrilatères susceptibles de fournir des maillages plus réguliers dans le cadre des maillages structuraux basés sur des réseaux réguliers de points [Frey 1999]. La difficulté qui se présente alors est qu'il est impossible de contrôler que le quadrilatère reste plan, ce qui est très gênant dans la méthode des éléments finis. C'est pour cette raison que Coons a développé une forme spécifique comportant un mode de torsion [Coons 1967]. C'est une forme non plane, mais à bords droits. Le quadrilatère peut donc être défini par ses quatre sommets :

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & \dots & \dots \\ x_3 & \dots & \dots \\ x_4 & \dots & z_4 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Les fonctions de mélange relatives aux quatre sommets sont des fonctions qui valent 1 à l'un des sommets et 0 aux autres :

$$F = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4] = [(1-s)(1-t) \quad s(1-t) \quad st \quad (1-s)t] \quad (2.8)$$

L'ensemble de ces fonctions constitue une combinaison barycentrique :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \quad (2.9)$$

Le carreau est défini comme un point dont la position varie en fonction des deux paramètres s et t compris entre 0 et 1, c'est-à-dire comme une combinaison barycentrique des quatre sommets du quadrilatère.

$$P = [F]Q \quad (2.10)$$

En écrivant cette expression de manière plus explicite, on voit que le point est fonction des deux paramètres.

$$P(s, t) = [x(s, t) \quad y(s, t) \quad z(s, t)] = [F]Q \quad (2.11)$$

Le calcul des dérivées est immédiat :

$$\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s} Q \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} Q \quad (2.12)$$

Les dérivées des fonctions de forme s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} &= [-(1-t) \quad (1-t) \quad t \quad -t] \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= [-(1-s) \quad -s \quad s \quad (1-s)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour effectuer un changement de coordonnées, des cartésiennes vers les paramétriques ou *vice versa*, il faut calculer le jacobien de la transformation :

$$J = \left\| \frac{\partial P}{\partial s} \times \frac{\partial P}{\partial t} \right\| \quad (2.14)$$

En développant, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial s} \times \frac{\partial P}{\partial t} = \left[\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \quad \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} \quad \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right] \quad (2.15)$$

Et finalement le déterminant du jacobien :

$$J(s, t) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2} \quad (2.16)$$

L'intégrale sur le carré d'une fonction g exprimée en fonction des deux paramètres s et t qui le décrivent s'écrit donc :

$$\iint_P g dP = \iint g \, dx dy = \iint_P g(s, t) J(s, t) \, ds dt \quad (2.17)$$

Cette intégrale doit être calculée numériquement, car son jacobien ne peut pas l'être facilement. La fonction g est quelconque et doit simplement pouvoir être calculée aux points de Gauss si on utilise cette technique.

Le passage des coordonnées paramétriques aux coordonnées cartésiennes est trivial par la relation (2.11), mais l'inverse est moins évident, car il faut résoudre une équation surdéterminée non linéaire.

Intégration numérique sur le carreau de Coons

$$\iint f(x, y) dx dy = \sum f(x_i, y_i) w_i \quad (2.18)$$

Cette technique consiste à évaluer l'intégrand $f(x, y)$ en un certain nombre de points. Il est alors suffisant de calculer la somme de ses valeurs pondérées en assignant *a priori* un poids w_i à chacun des points d'évaluation. Pour une fonction paramétrique, il faut rajouter le jacobien de la transformation.

$$\iint_p g(s, t) J(s, t) ds dt = \sum_i g(s_i, t_i) w(s_i, t_i) J(s_i, t_i) \quad (2.19)$$

<i>Nombre de points</i>	<i>Positions x_i dans l'intervalle [0 1]</i>	<i>Poids w_i</i>
1	0.5	1
2	$0.5 \pm \sqrt{3}/6$.5
3	0.5 , $0.5 \pm \sqrt{3}/20$	4/9, 5/18, 5/18
4	$0.5 \pm 1/70 \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $0.5 \pm 1/70 \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$1/4 + \sqrt{30}/72$; $1/4 + \sqrt{30}/72$ $1/4 - \sqrt{30}/72$; $1/4 - \sqrt{30}/72$

Table 6 : Positions et poids des points d'intégration de la quadrature de Gauss

Le but des tests est d'évaluer la précision des intégrations numériques par quadrature de Gauss sur un carreau (patch) de Coons. On effectue d'abord des tests de vérification, le premier sur une fonction trigonométrique pour laquelle la quadrature numérique ne peut pas donner une solution exacte, même si elle s'en approche quand on utilise quatre points dans chaque direction (Table 7).

Dans le second groupe de tests, on intègre des fonctions polynomiales. On obtient une solution exacte à partir d'un nombre suffisant de points. A une dimension, une formule à n points est exacte jusqu'à un polynôme de degré $2n-1$. Toutes les cases comportant des solutions exactes sont sur fond gris (Table 7). Les valeurs en rouge sont exactes ou proches de la solution exacte.

Fonction intégrée sur le carreau	Solution exacte	Nombre de points de Gauss			
		1	4 = 2 x 2	9 = 3 x 3	16 = 4 x 4
1. $\sin(\pi s)$	0.6366	1.0	0.6162	0.6371	0.6366
2. s^3	0.25	0.125	0.25	0.25	0.25
3. s^5	0.1667	0.0313	0.1528	0.1667	0.1667
4. s^7	0.1250	0.0078	0.0949	0.1238	0.1250

Table 7 : Tests de la quadrature de Gauss sur un carreau de Coons

```

1 P1 = [0 0 0 ];P2 = [1 0 0 ];P3 = [1 1 1];P4 = [0 1 1]; % carreau incliné
2 Q = [P1; P2; P3; P4]; % Définition du carreau de Coons
3 J4 = 0; %***** Determinant du Jacobien pour 4 points de Gauss
4 s = [.5-sqrt(3)/6 .5+sqrt(3)/6 .5+sqrt(3)/6 .5-sqrt(3)/6];
5 t = [.5-sqrt(3)/6 .5-sqrt(3)/6 .5+sqrt(3)/6 .5+sqrt(3)/6];
6 for i=1:4;
7 f = [(1-s(i))*(1-t(i)) s(i)*(1-t(i)) s(i)*t(i) (1-s(i))*t(i)];
8 fs = [-(1-t(i)) (1-t(i)) t(i) -t(i)];
9 ft = [-(1-s(i)) -s(i) s(i) (1-s(i))];
10 ds = fs*Q;dt = ft*Q;P0 = f*Q;
11 J4 = J4 + norm(cross(ds,dt))/4;
12 end
13 disp([' Résultat de l intégration: ',num2str(J4)])

```

L'intégrale d'une constante sur le carreau fournit son **aire**.

```

P1 = [0 0 0 ];P2 = [1 0 0 ];P3 = [1 1 1];P4 = [0 1 1]; % Carreau incliné
Résultat de l intégration: 1.4142

```

```

P1 = [0 0 0 ];P2 = [1 0 1 ];P3 = [1 1 -1 ];P4 = [0 1 0]; % Avec torsion
Résultat de l intégration: 1.5922

```

Table 8 : Procédure Matlab[®] pour une quadrature de Gauss 2 x 2, sur un carreau de Coons

Exercice n°2 : Calculer l'aire d'un carreau de Coons, soit en le décomposant en $n \times n$ éléments, chacun des éléments étant assimilé à un assemblage de quatre triangles, soit en effectuant le calcul directement en se basant sur les points et poids de Gauss. Analyser la convergence de la solution.

3. Sphère, polygones sphériques et angles solides

Dans les calculs d'échanges radiatifs, il est nécessaire de décrire l'environnement complet d'un élément de surface ou d'un point. Cette connaissance est idéalement obtenue par une projection de tout l'espace sur une sphère entourant ce point. Sur cette sphère apparaît donc tout l'environnement visible à partir du point.

L'objet géométrique sur lequel est réalisée la projection (en géométrie projective, on l'appelle *tableau*) est une sphère centrée à l'origine qui coïncide avec le centre de projection ($O = S$); la projection est une projection centrale. Le rayon de la sphère est sans importance, le résultat obtenu étant toujours le même, à l'échelle près de la sphère.

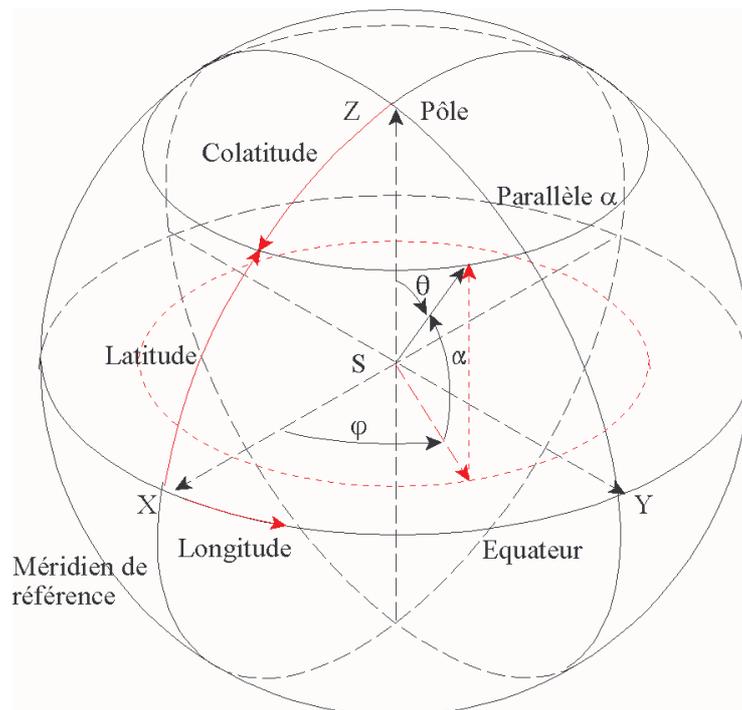


Figure 12 : Coordonnées sphériques

La projection sphérique P d'un point Q , non situé à l'origine des coordonnées S , sur la sphère de rayon r , centrée à l'origine S , est donnée par la formule suivante.

$$P = r \frac{Q}{|Q|} \quad (3.1)$$

Après projection, toute notion de distance du point au centre de projection disparaît et seule importe la direction dans laquelle se trouve le point. Cette direction est repérée par deux angles qui, en cartographie, sont la *latitude* notée α ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$) et la *longitude* notée φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$).

En coordonnées sphériques, on utilise plutôt le terme *colatitude* θ (ou *angle polaire*, ou *distance zénithale*) telle que: $\theta = \pi/2 - \alpha$ avec: $0 \leq \theta \leq \pi$. On en déduit les relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes.

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \varphi \\
 y &= r \sin \theta \sin \varphi \\
 z &= r \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Tout l'espace peut être représenté sur une surface sphérique à l'exception d'un seul point : le centre de projection. Dans la définition de la projection centrale, que nous appelons *non-orientée* (les projetantes sont des droites infinies), un point a toujours deux images: les deux points de percée de la droite projetante sur le tableau sphérique. En adoptant une définition *orientée* (les projetantes sont des demi-droites issues du centre de projection), on supprime l'image à l'antipode et la rupture topologique induite.

La droite et le polygone

L'intersection d'une sphère et d'un plan est un cercle; son rayon est le même que celui de la sphère, si et seulement si le plan passe par son centre; il porte alors le nom de *grand cercle*. Dans tous les autres cas, son rayon est inférieur, et l'on parle alors d'un *petit cercle*; qui dans le cas limite d'un plan tangent se réduit à un point.

Par conséquent, la projection sur la sphère d'un segment de droite est un arc de grand cercle car c'est l'intersection du plan passant par le segment de droite et le centre de la sphère. Elle se réduit à un point si le segment de droite est projetant (c'est-à-dire si la droite passe par le centre de projection).

Dans la définition orientée de la projection, une droite de longueur infinie non projetante se représente par un demi-grand cercle, dont les points extrêmes figurent les deux points de fuite de la droite (points à l'infini). Les images de droites parallèles sont des arcs de grands cercles qui se coupent sur un même diamètre parallèle aux droites.

L'image d'un plan est une demi-sphère, sauf si le plan passe par le centre de projection (plan projetant), auquel cas son image est l'arc de grand cercle correspondant à son intersection avec la sphère. Dans la projection sphérique, il n'existe qu'un seul point singulier, le centre de la sphère.

Projection sur la sphère

La projection sur la sphère pose le problème de sa représentation plane, laquelle nécessite une seconde projection et introduit nécessairement des distorsions de l'image sphérique ; c'est le cas du demi-cube quadrillé (*Figure 13, à gauche*). De plus, si l'image occupe la sphère complète, il est nécessaire d'introduire une ligne de séparation artificielle lors de cette seconde projection.

L'image d'une ligne brisée fermée, pas nécessairement plane (si elle est plane, c'est un polygone) est un *polygone sphérique* : contour fermé tracé sur une sphère et composé d'arcs de grands cercles (*Figure 13, à droite*). On distingue:

- les *côtés*, qui sont les arcs de grands cercles composant le contour ou périmètre du polygone;
- les *sommets*, qui sont les extrémités des côtés;
- les *angles*, qui sont les angles sphériques formés par deux côtés consécutifs du polygone.

On appelle *angle polyèdre central* d'un polygone sphérique l'angle polyèdre obtenu en joignant les sommets du polygone au centre de la sphère correspondante. En particulier, à tout triangle sphérique correspond un trièdre central et inversement.

D'une façon générale, on appelle *angle solide en un point* l'espace limité par une surface conique quelconque ayant son sommet en ce point. Les angles polyédriques en sont des cas particuliers. Un angle solide a pour mesure la portion de surface sphérique de rayon égal à l'unité ayant son centre au sommet du cône délimitant l'angle solide et limitée par la surface conique.

Les éléments d'un angle polyèdre central se retrouvent aisément dans un polygone sphérique : chaque arête de l'angle polyèdre est représentée par un sommet du polygone, chaque face angulaire par un arc de cercle qui a la même mesure, chaque dièdre par un angle curviligne égal au rectiligne de ce dièdre.

Un polygone sphérique est dit convexe lorsque chaque côté prolongé laisse tout le polygone dans le même hémisphère; à tout polygone sphérique convexe correspond un angle polyèdre central convexe, et inversement.

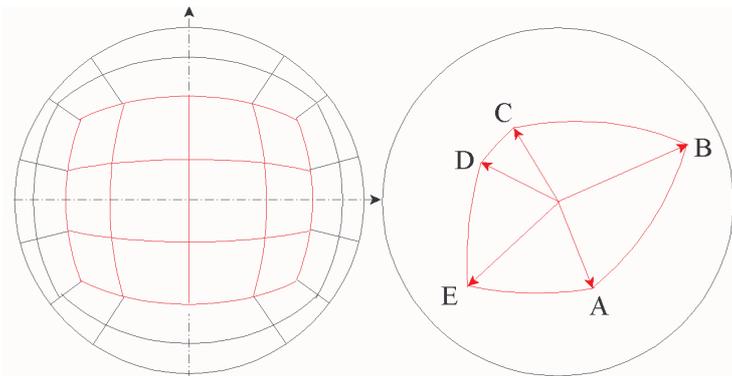


Figure 13 : Projection orthogonale, polygone sphérique

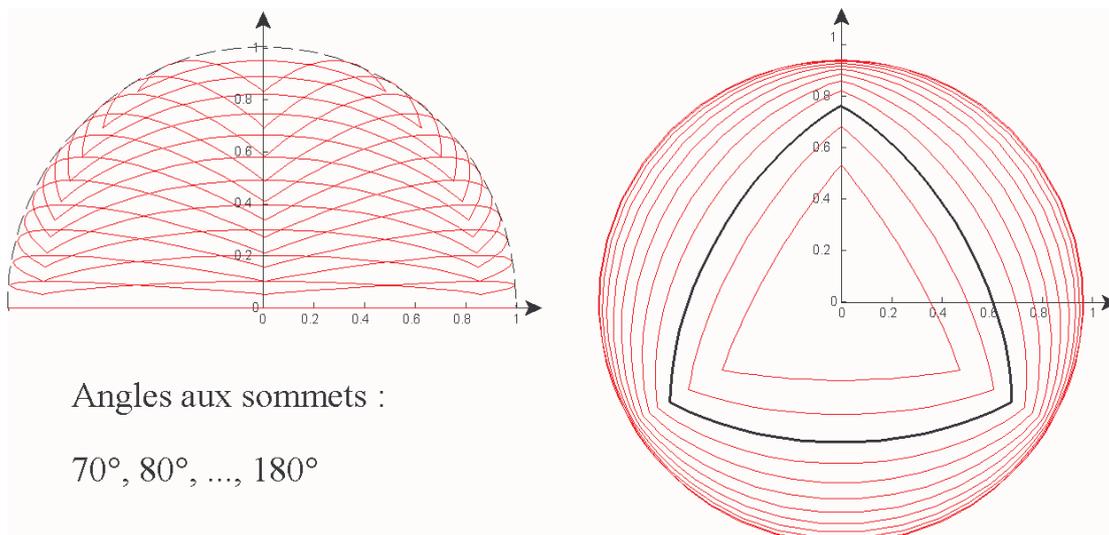


Figure 14 : Triangles sphériques

Contrairement au cas plan, il existe des polygones sphériques à un seul côté (la demi-sphère) et à deux côtés (les fuseaux). La *Figure 14* représente, sur une vue en élévation et sur une vue en plan, une demi-sphère et douze triangles sphériques équilatéraux dont les angles aux sommets varient entre 70 et 180 degrés. Le dernier triangle, dont les angles aux sommets valent 180 degrés et les côtés 120 degrés, coïncide avec la demi-sphère. Contrairement au triangle plan,

le triangle sphérique n'est pas nécessairement convexe; par exemple le complément sphérique d'un triangle sphérique convexe est un triangle sphérique non convexe.

On appelle pyramide sphérique la partie du volume de la sphère délimitée par un angle polyèdre central et le polygone sphérique correspondant; ce polygone sphérique est la base de la pyramide sphérique.

Les pôles d'un cercle dessiné sur la sphère sont les extrémités du diamètre qui lui est perpendiculaire. Un triangle sphérique $A'B'C'$ est dit *polaire* d'un autre ABC ¹, si ses sommets A' , B' et C' sont les pôles respectifs des côtés BC , AC et AB du second, les points A et A' étant dans le même hémisphère par rapport à BC , B et B' par rapport à CA et enfin, C et C' par rapport à AB (Figure 15).

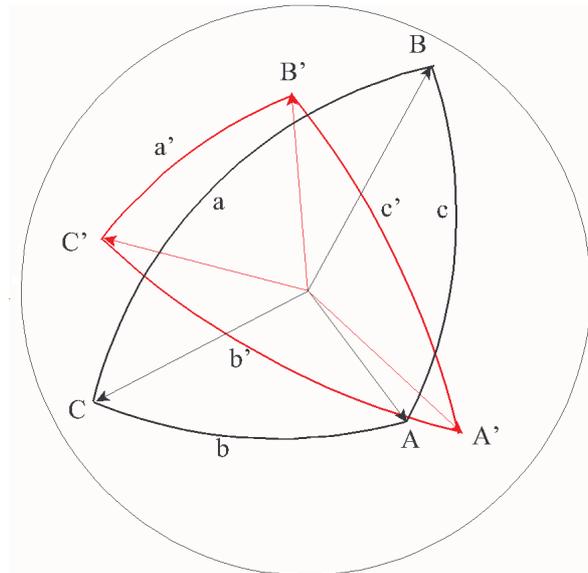


Figure 15 : Un triangle sphérique et son polaire

Théorème : les trièdres centraux correspondant à un triangle sphérique et à son polaire sont supplémentaires :

$$\begin{aligned} a + A' &= b + B' = c + C' = \pi \\ a' + A &= b' + B = c' + C = \pi \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le calcul des aires sur la sphère constitue une étape indispensable dans l'évaluation des angles solides. On peut, soit évaluer les aires des polygones sphériques, ou reprendre les éléments différentiels d'arcs. Commençons par la seconde méthode.

$$\iint_S dS = \iint_S r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (3.4)$$

Cette méthode est très efficace pour calculer les aires des cellules limitées par des méridiens et des parallèles. En effet, pour des surfaces de ce type, elle s'écrit :

¹ Remarque : Une lettre majuscule désigne à la fois un sommet de polygone sphérique et l'angle en ce sommet; une lettre minuscule désigne le côté d'un polygone sphérique et la valeur en radians de l'arc.

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = r^2 (\varphi_2 - \varphi_1)(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (3.5)$$

On a aussi pour la calotte sphérique d'ouverture θ_2 et pour laquelle le pôle de la calotte est à une distance h du plan contenant son cercle limite :

$$2\pi r^2 (1 - \cos \theta_2) = 2\pi r h \quad (3.6)$$

A partir de l'aire et du volume de la sphère, on définit ceux des figures limitées par des arcs de grands cercles. Le fuseau est la partie de la surface de la sphère limitée par deux demi-circonférences de grand cercle, terminées sur un même diamètre. On appelle *dièdre central* un dièdre dont l'arête passe par le centre de la sphère, et qui détermine donc un fuseau sur la surface sphérique. L'*onglet sphérique* est la partie du volume de la sphère limitée par deux demi-grands cercles, terminés à un même diamètre.

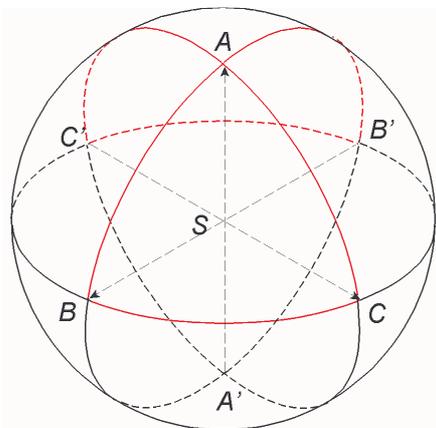


Figure 16 : Angles complémentaires

Quelques aires et volumes sont repris dans la *Table 9* et comparés à ceux d'autres géométries. Il est intéressant de noter que les aires de la sphère et de la surface latérale du cylindre circonscrit sont égales.

	Aire	Volume
Cube (coté $2R$)	$24R^2$	$8R^3$
Sphère (rayon : R)	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
Sphère secteur (rayon: R , ouverture : α)	$2\alpha R^2$	$\frac{2}{3}\alpha R^3$
Cylindre (rayon: R ; hauteur : $2R$) 2 bases + aire latérale	$2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$	$2\pi R^3$
Cylindre secteur (ouverture : α ; hauteur: $2R$)	$2\alpha R^2$	αR^3
Bi-cône inscrit dans le cylindre et partageant le même axe et le même diamètre des bases	$2\sqrt{2}\pi R^2$	$\frac{2\pi}{3}R^3$

Table 9 : Aires et volumes de quelques géométries

Lorsque deux triangles sphériques appartenant à la même sphère ont un sommet commun et les deux autres diamétralement opposés, leur somme est équivalente au fuseau ayant pour angle l'angle commun aux deux triangles; on dit qu'ils sont *complémentaires* (Figure 16).

Dans tout triangle sphérique convexe :

$$\begin{aligned} \pi &\leq A+B+C \leq 3\pi \\ A+B-C &< \pi \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans un triangle d'angles A, B, C , la différence $(A + B + C - \pi)$ s'appelle l'*excès sphérique* du triangle ABC et se représente par $2E$.

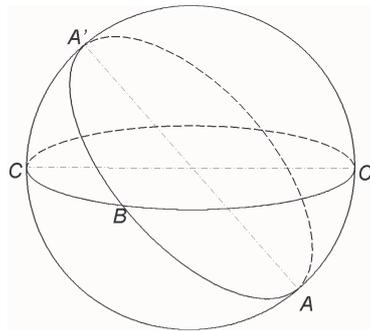


Figure 17 : Aire d'un triangle

Soit T , l'aire du triangle trirectangle ($1/8$ de l'aire de la sphère elle-même égale à $4 \pi R^2$). Soit ABC un triangle sphérique (Figure 17). Prolongeons AB et CB jusqu'aux points A' et C' diamétralement opposés à A et à C ; si l'on désigne respectivement par *fuseau A*, *fuseau B* et *fuseau C* les aires des fuseaux qui ont comme angles les angles du triangle donné et par (ABC) les aires des triangles ABC, \dots , on a :

$$\begin{aligned} (ABC) + (CBA') &= \text{fuseau } A \\ (ABC) + (BA'C) &= \text{fuseau } B \\ (ABC) + (ABC') &= \text{fuseau } C \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, il vient :

$$2(ABC) = \text{fuseau } A + \text{fuseau } B + \text{fuseau } C - \frac{1}{2} \text{ sphère}$$

En divisant chacun des termes par l'aire d'un fuseau droit dont la mesure est $\pi/2$, on obtient:

$$\frac{2(ABC)}{\pi R^2} = \frac{2A}{\pi} + \frac{2B}{\pi} + \frac{2C}{\pi} - 2 \quad (3.8)$$

L'aire du triangle convexe ABC situé sur la sphère de rayon R , est donnée par :

$$(ABC) = (A+B+C-\pi)R^2 = 2ER^2 \quad (3.9)$$

Le volume de la pyramide sphérique convexe A, B, C , est égal à : $(A+B+C-\pi) R^3/3$, c'est-à-dire, le produit de l'aire de la base par $1/3$ du rayon.

L'aire d'un polygone sphérique convexe de n sommets A, B, \dots est donnée par

$$(ABC\dots) = (A+B+C+\dots - (n-2)\pi)R^2, \quad n \geq 2 \quad (3.10)$$

Comme l'excès sphérique d'un polygone doit être plus grand ou égal à zéro, la valeur de la somme de ses angles aux sommets doit être supérieure ou égale à $(n-2)\pi$. En cas d'égalité, l'aire est nulle, c'est le cas limite du polygone plan.

Trigonométrie sphérique

La formule fondamentale de la géométrie sphérique traduit la relation qui existe entre un angle du triangle et les trois côtés (*Figure 18*). Prenons une sphère de rayon égal à l'unité : soit le triangle sphérique ABC . Projetons orthogonalement les sommets B et C sur OA en P et Q :

$$\begin{aligned} OQ &= \cos b \quad , \quad QC = \sin b \\ OP &= \cos c \quad , \quad PB = \sin c \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} OB \cdot OC &= \cos a = (OP + PB) \cdot (OQ + QC) \\ OB \cdot OC &= OP \cdot OQ + OP \cdot QC + PB \cdot OQ + PB \cdot QC \\ \cos a &= \cos c \cos b + 0 + 0 + \sin c \sin b \cos A \end{aligned}$$

L'angle des directions positives des deux vecteurs PB et QC est égal à l'angle A . On obtient par permutation circulaire :

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'examen du triangle polaire permet aussi d'écrire :

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \quad (3.13)$$

En éliminant successivement les angles a, A puis b, B et enfin c, C entre le premier groupe d'équations, on établit encore le système :

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (3.14)$$

Enfin, si on pose, $a + b + c = 2p$, on obtient :

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}} \quad (3.15)$$

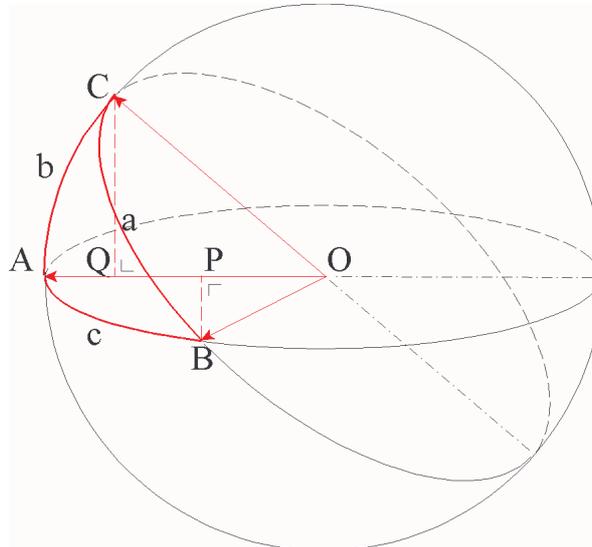


Figure 18 : Triangle sphérique

Cette relation sert à calculer la surface d'un triangle sphérique à partir de ses côtés. Ces équations permettent, pour les pyramides, de calculer les angles dièdres des faces issues d'un sommet en fonction de leurs angles au même sommet (Figure 19). Elles s'appliquent aussi au calcul des angles dièdres des faces d'un polyèdre aboutissant à un sommet commun.

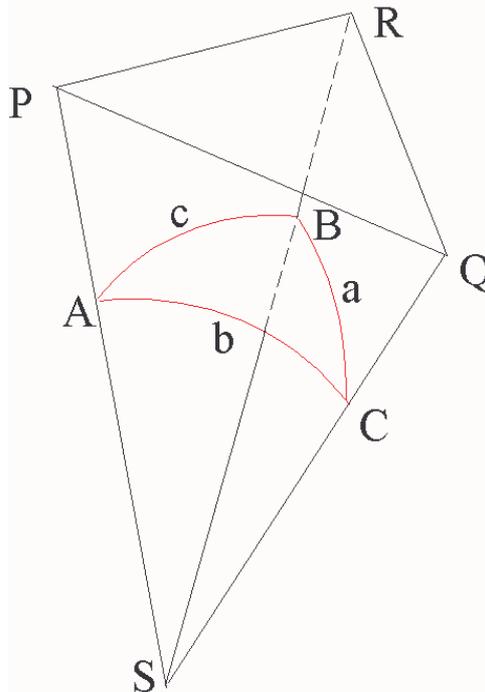


Figure 19 : Pyramide SPQR et pyramide sphérique SACB

Angle solide d'un objet A depuis un point P

- Procédure :
1. Projeter cet objet sur la sphère unitaire centrée en P .
 2. Calculer l'aire de la projection sphérique A_p de l'objet. Celle-ci est égale à l'angle solide recherché.

$$A_{S_x-A} = A_p = \int_{A_p} d\omega \quad (3.16)$$

L'angle solide de l'espace complet entourant un point est égal à 4π . L'angle solide au dessus de l'horizon c'est-à-dire correspondant à un hémisphère est égal à 2π .

Pour calculer l'aire d'un triangle sphérique, on utilise, soit les angles des sommets (A , B , C), soit les angles des cotés (a , b , c), (*Figure 19*).

$$\begin{aligned} Aire_{\text{triangle_sphérique_}ABC} = 2E &= \frac{A + B + C - \pi}{2p} \\ \frac{E}{2p} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

La projection du triangle PQR sur la sphère unitaire est le triangle sphérique ABC . Par définition de cette projection, les modules des segments de droites SA , SB , et SC sont égaux à 1.

$$\vec{SA} = \frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|} ; \vec{SB} = \frac{\vec{SQ}}{|\vec{SQ}|} ; \vec{SC} = \frac{\vec{SR}}{|\vec{SR}|} \quad (3.18)$$

Nous désignons par A l'angle dièdre ente les faces SAB et SAC (les autres étant obtenus par permutation circulaire). Les cotés de ce triangle sphérique désignés par les lettres minuscules a , b et c sont des arcs de grands cercles. Puisque nous sommes sur une sphère unitaire, les longueurs des arcs a , b et c sont égales aux trois angles aux sommets S de la pyramide sphérique $SABC$ (ces angles doivent être mesurés en radians). Le périmètre du triangle sphérique est noté $2p = a + b + c$. Les six angles A , B , C ainsi que a , b et c peuvent être calculés vectoriellement à partir de la définition de la pyramide.

L'angle solide du triangle PQR vu depuis le point de vue S est égal à l'aire du triangle sphérique ABC construit sur la sphère unitaire de centre S . Pour calculer son aire, on procède de la manière suivante :

1. Calculer les normales aux faces SPQ , SQR et SRP en effectuant des produits vectoriels entre les arêtes de la pyramide issues du sommet.

$$\vec{n}_{SPQ} = \frac{\vec{SP} \wedge \vec{SQ}}{|\vec{SP} \wedge \vec{SQ}|} ; \vec{n}_{SQR} = \frac{\vec{SQ} \wedge \vec{SR}}{|\vec{SQ} \wedge \vec{SR}|} ; \vec{n}_{SRP} = \frac{\vec{SR} \wedge \vec{SP}}{|\vec{SR} \wedge \vec{SP}|} \quad (3.19)$$

2. Calculer les angles dièdres des faces issues du sommet en effectuant les produits scalaires de leurs normales.

$$\begin{aligned}
 \cos A &= - \frac{\overrightarrow{n_{SPQ}} \cdot \overrightarrow{n_{SRP}}}{\|\overrightarrow{n_{SPQ}}\| \|\overrightarrow{n_{SRP}}\|} \\
 \cos B &= - \frac{\overrightarrow{n_{SQR}} \cdot \overrightarrow{n_{SPQ}}}{\|\overrightarrow{n_{SQR}}\| \|\overrightarrow{n_{SPQ}}\|} \\
 \cos C &= - \frac{\overrightarrow{n_{SRP}} \cdot \overrightarrow{n_{SQR}}}{\|\overrightarrow{n_{SRP}}\| \|\overrightarrow{n_{SQR}}\|}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

A partir des formules (3.17) à (3.20), on écrit la procédure de la *Table 10*. Cette procédure peut sans difficulté être étendue à un polygone quelconque de l'espace. Dans les données de la procédure, le point de vue est au centre d'un cube unitaire pour lequel on calcule l'angle solide d'une demi-face. Cet angle solide est par conséquent égal au douzième de celui de la sphère.

1	P	= [-.5 -.5 .5];Q = [.5 -.5 .5];R = [-.5 .5 .5];
2	S	= [0 0 0];
3	SA	= (P-S)/norm(P-S);
4	SB	= (Q-S)/norm(Q-S);
5	SC	= (R-S)/norm(R-S);
6	nSAB	= cross(SA,SB)/norm(cross(SA,SB));
7	nSBC	= cross(SB,SC)/norm(cross(SB,SC));
8	nSCA	= cross(SC,SA)/norm(cross(SC,SA));
9	A	= acos(-dot(nSAB,nSBC));
10	B	= acos(-dot(nSBC,nSCA));
11	C	= acos(-dot(nSCA,nSAB));
12	As	= A+B+C-pi;
13	disp	(['Angles som. triangle sphérique : ',num2str([A B C]*180/pi)])
14	disp	(['Angle solide du triangle P-Q-R : ',num2str(As)])
15	disp	(['Angle solide PQR en % sphère : ',num2str(As*100/(4*pi))])

Résultat:			
Angles som. triangle sphérique :	60	60	120
Angle solide du triangle P-Q-R :	1.0472		
Angle solide PQR en % sphère :	8.3333		

Table 10 : Procédure Matlab[®] de calcul de l'angle solide d'un triangle

Exercices :

*Calculer la distance entre deux points de longitude et latitude données.
Réaliser le tracé d'arcs de grands cercles dont on donne les extrémités.*

Exercice n°3 : Calculer l'angle solide d'un polygone de l'espace en se basant sur les angles aux sommets du polygone sphérique associé. Effectuer le même calcul en se basant sur les longueurs des cotés du même polygone sphérique.

4. Lancer de rayons

Le calcul des échanges radiatifs peut être réalisé en utilisant des méthodes de *radiosité*. Mais ces dernières concernent uniquement les la réflexion diffuse. Lorsqu'il faut prendre en compte de la réflexion spéculaire, il est nécessaire de faire appel aux techniques de lancer de rayons, elles-mêmes utilisées dans le cadre des méthodes de Monte Carlo. Le problème est alors d'être capable de lancer les rayons de manière uniforme dans tout l'espace entourant le point étudié. Dans [Beckers 2013, 2014], les auteurs présentent ce qu'ils considèrent comme la meilleure méthode pour réaliser des tirs optimaux.

Monte Carlo à échantillonnage stratifié

Dans les méthodes de Monte Carlo à échantillonnage stratifié, le tir est réalisé non pas sur l'ensemble du domaine mais à l'intérieur de cellules dont l'union recouvre le domaine. La première étape de ces méthodes consiste donc à construire un maillage sur la sphère supportant le tir des rayons.

Le fait de créer un maillage fournit automatiquement des moyens d'organiser plusieurs types de tirs déterministes définis à partir des nœuds du maillage ou à l'intérieur des mailles.

Il est cependant possible de générer des points uniformément répartis sur la sphère sans passer par des maillages. En se basant sur des arcs de méridiens et des segments de parallèles, construits de manière à avoir des longueurs égales, il est possible de générer des séquences de points comme à la *Figure 20 1a*. Dans la méthode de Stenseng cité dans (Krokstad, 1968), on définit d'abord le nombre de parallèles sur lesquels seront distribués les points. Ainsi, pour obtenir environ 500 points, il faut imposer 14 parallèles qui fourniront 492 points, ou 15 parallèles qui en donneront 572. Dans cette méthode, il n'est pas possible d'obtenir un résultat intermédiaire.

Dans les Monte Carlo stratifiés, afin de préserver l'uniformité du tir, on impose des cellules de même aire. Cela a conduit à différentes méthodes parmi lesquelles celles qui sont basées sur les polyèdres réguliers, mais ces approches sont limitées par le fait qu'il n'existe que cinq polyèdres sphériques réguliers. D'autres méthodes sont basées sur un quadrillage de la sphère construit sur des arcs de méridiens et de parallèles.

Dans (Trogenza, 1987), la conception des carreaux est basée sur la recherche de cercles inscrits de taille maximum dans le but de concevoir des scanners de ciel pour des études de luminance. L'auteur arrive ainsi à une très bonne couverture de l'hémisphère par des cercles disposés selon des parallèles. Dans (Crittenden, 2000), la définition du maillage se base sur la façon de fabriquer les igloos à partir de briques de neige quasi identiques disposées le long de parallèles.

Pour construire des cellules d'aires égales sur la sphère, il est pratique de se tourner vers ses projections à aires égales dont les plus connues sont les projections de Lambert (1760), soit la cylindrique (Farina 1995), dont la vue 3D est montrée à la *Figure 20 1c*, soit la circulaire (Beckers, 2012), dont deux vues 3D sont montrées en *1b* et *1d*. C'est la seule méthode dans laquelle le nombre de cellules peut être imposé exactement.

Dans la partie supérieure de la même figure, la partie de droite comporte le même nombre de cellules que la partie de gauche de points, on voit que ces deux vues comportent quasiment le même type de disposition de points ou de cellules.

Le maillage de la *Figure 20 1c* est congruent pour peu qu'on ne tienne pas compte des cellules polaires, alors que les autres ne le sont pas. Dans les maillages de N cellules d'aires égales (*EA*: *equal area*) que nous proposons, nous suggérons de définir un maillage de dimension $n \times m$ qui s'adapte bien au cas hémisphérique et assure une distribution très homogène des éléments:

$$n = \left\langle \sqrt{N/2} \right\rangle_{\text{integer}} ; m = \left\langle N/n \right\rangle_{\text{integer}} \quad \text{with a total of cells: } N = nm + 1 \quad (4.1)$$

Pour un objectif de 500 éléments sur l'hémisphère, on obtient le réseau : $33 \times 15 + 1 = 496$.

Si la congruence n'est pas imposée, on dispose d'un degré de liberté supplémentaire pour générer le maillage. Nous proposons donc d'imposer que le rapport d'aspect des cellules sur la sphère soit le plus proche possible de l'unité.

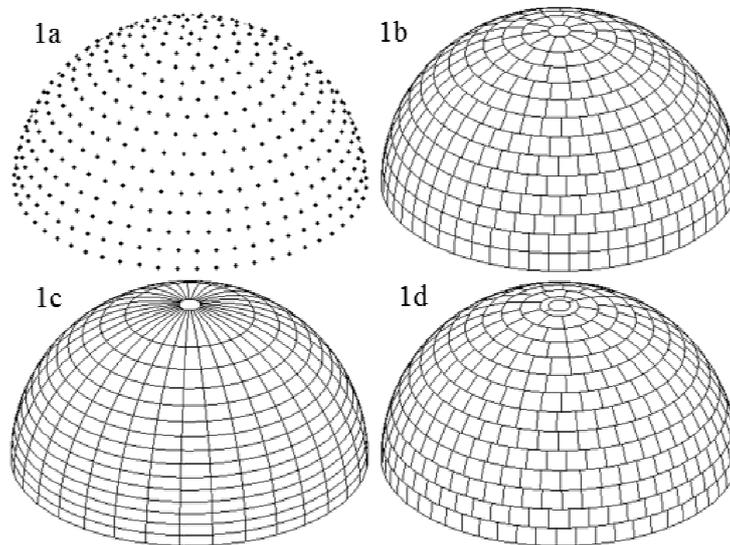


Figure 20 : Quatre configurations: 1a & 1b: 492 points ou cellules, 1c & 1d: 496 cellules

Cette proposition avait été suggérée dans (Tregenza, 1987), qui cherchait à inscrire dans chaque cellule un cercle de diamètre maximum. Elle a été développée en détail dans (Beckers, 2013) en introduisant un critère physique simple: l'indice de recouvrement. Celui-ci montre clairement que dans le modèle à aires égales *EA* (*equal area*) de la *Figure 20c*, le rapport d'aspect est en général mauvais sauf dans la zone supérieure des cercles 3 et 4. Dans les modèles *EAR* (*equal aspect ratio*) de la *Figure 20 1b, 1d*, le rapport est partout très bon. Selon (Beckers 2013), le rapport d'aspect est optimal lorsque les cercles inscrits dans les cellules touchent leurs quatre cotés, ce qui est le cas dans la plupart des cellules de la *Figure 20 1b*.

Volume d'une sphère

Prenons l'exemple du calcul du volume d'une sphère. Cet exemple est représentatif du calcul non seulement des solides convexes mais aussi de n'importe quel volume, qu'il soit d'un seul tenant ou non. Cette procédure, qui n'est pas nécessairement très efficace, a l'immense

avantage de ne faire appel qu'à des opérateurs géométriques extrêmement simples. Il suffit que ces opérateurs permettent de calculer l'intersection d'une droite avec un carreau surfacique.

Le volume de la sphère est calculé par addition des volumes des pyramides sphériques construites sur les rayons lancés depuis la source située en un point intérieur quelconque. Quand on lance N rayons dans la sphère unitaire, si chacun d'eux correspond au même angle solide, on obtient pour les N pyramides sphériques :

$$\text{Sphere volume} = \sum_1^N \frac{4\pi t^2}{N} \frac{t}{3} = \frac{4\pi}{3N} \sum_1^N t^3 \quad (4.2)$$

Ce processus est représenté à la [Figure 21](#). On y voit deux cônes opposés qu'on peut interpréter comme des pinceaux ; ils sont issus d'un point intérieur à la sphère. L'ouverture de la surface conique de la [Figure 21](#) est de $1/20$ stéradian. L'axe de la surface représente les deux rayons opposés tirés depuis la source. On note t la longueur de ces rayons ; pour un tir uniforme de N rayons, la base de la pyramide sphérique est égale à $4\pi/N$ stéradians. Avec une ouverture de $1/20$ stéradian, 80π rayons pourraient couvrir l'entièreté de la surface sphérique à condition qu'il n'y ait pas de recouvrement des pinceaux.

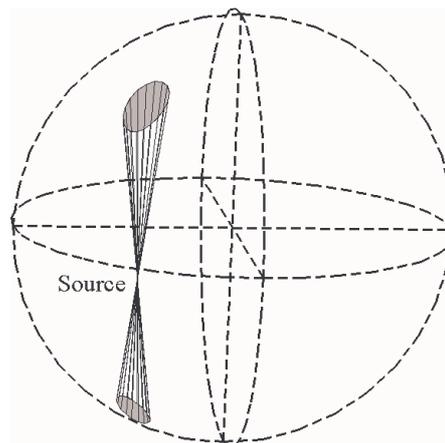


Figure 21 : Pyramides sphériques tracées depuis un point intérieur, même axe et même angle solide

Lorsque la source est située à l'extérieur de la sphère ([Figure 22](#)), la solution est calculée selon le même principe qu'en (4.2), mais, cette fois, un rayon n'est pris en compte que s'il coupe deux fois la sphère. La solution est alors obtenue en calculant la différence entre les deux pyramides construites sur le rayon. Sur les N rayons, n coupent la sphère deux fois, en des points situés à des distances t_i et t_o de la source (avec $t_o > t_i$). On obtient donc :

$$\text{Volume} = \frac{4\pi}{3N} \sum_1^n (t_o^3 - t_i^3) \quad (4.3)$$

Les méthodes de lancer de rayons sont comparées les unes aux autres dans le calcul du volume de la sphère en déplaçant la source depuis le centre jusqu'à la surface extérieure. Quelle que soit la manière de réaliser le tir, le résultat est égal à 1 lorsqu'on se place au centre de la sphère. Dans la méthode de Monte Carlo standard, le résultat se dégrade rapidement à partir de la

position au quart du rayon, alors qu'il reste stable dans la méthode de Monte Carlo à échantillonnage préférentiel, quelle que soit la position de la source.

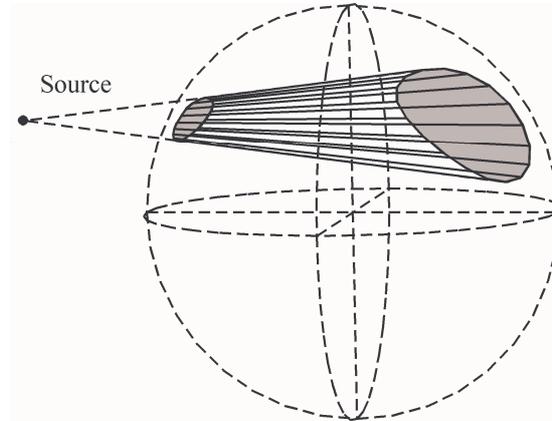


Figure 22 : Pyramide sphérique tracée depuis un point extérieur

Erreur en % pour les méthodes de Monte Carlo - 1000 rayons				
(Distance au centre) /rayon	MC standard	MC importance	EA	EAR
0	0	0	0	0
0.1	0.46	-0.31	0.09	0.06
0.2	1.65	-0.55	0.19	0.12
0.3	3.51	-0.68	0.29	0.17
0.4	5.98	-0.68	0.39	0.22
0.5	8.95	-0.54	0.49	0.27
0.6	12.30	-0.21	0.59	0.32
0.7	15.89	0.32	0.69	0.38
0.8	19.48	1.07	0.79	0.43
0.9	22.80	2.07	0.88	0.49
1.0	25.30	3.37	0.99	0.56

Table 1: Comparaison de quatre méthodes de Monte Carlo

Volume d'un cube

Une procédure de calcul du volume d'un cube par lancer de rayons est présentée dans la [Table 11](#). La méthode peut facilement être étendue au cas d'un hexaèdre irrégulier. Dans cette procédure on calcule le volume d'un cube de 4 cm de côté en lançant les rayons à partir de différents points situés entre le centre du cube et une de ses faces. Cette procédure fait appel à des fonctions Matlab[®] : *Bsams*, *Bsa3Dsd* et *Bsa3Ds* décrites dans ([Beckers 2016](#)).

Ces trois fonctions permettent de générer des rayons basés sur la création de cellules d'aires et de rapports d'aspect égaux. Dans ces cellules, on génère ensuite un rayon situé soit dans une position aléatoire, soit au centre de chaque cellule ([lignes 5 à 7](#)). Le nombre de cellules souhaitées (limité à 10000) est défini à la [ligne 2](#) tandis que le nombre de points à tester et leurs définitions le sont à la [ligne 4](#). Les deux calculs du volume correspondant aux lancers déterministes et aléatoires sont réalisés aux [lignes 8 à 11](#). On y fait appel à la

fonction de calcul *volu* (Table 12) où le calcul proprement dit est effectué. Le reste de la procédure est consacré aux visualisations et à l’affichage des résultats.

Dans la procédure *T12*, il s’agit de calculer la longueur des rayons entre la source et la première paroi rencontrée. Comme les plans des parois sont simplement définis par $x = \text{constante}$, $y = \text{constante}$ ou $z = \text{constante}$. Dans ce cas particulier la constante est égale à 1. Cela rend le calcul particulièrement simple (ligne 11 de la Table 12). Notons que rechercher le plus court rayon implique de ne considérer que les rayons positifs. Notons enfin que les arguments de la fonction sont les coordonnées sphériques de ces rayons ainsi que le nombre et les coordonnées des points d’où ils sont lancés.

```

1 clear all ; tstart = tic;
2 na = 10000; nt = min(na,100000);%Données: nombre de cellules sur sphère
3 pte = 10;x0=(0:pte)/10;x0(11)=0.995;
4 nucelc = Bsams(nt);nan=size(nucelc,2)/2; % Aires et rap. d'aspects égaux
5 drays = Bsa3Dsd(nucelc); % Calcul des pos. déterministes ds les cellules
6 draysa = Bsa3Ds (nucelc); % Calcul des pos. aléatoires ds les cellules
7 anze = pi/2-draysa(:,1);lont=draysa(:,2); % Volume méth MC stratifié
8 vol = T12(anze,lont,x0,pte);
9 anze = pi/2-drays(:,1);lont=drays(:,2); % Volume méth déterministe
10 vold = T12(anze,lont,x0,pte);
11 stat = [max(vol)-min(vol) max(vold)-min(vold) ]; % Visu. et affichages
12 top = max([max([max(vol) max(vold)]) 1.01]);
13 bot = min([min([min(vol) min(vold)]) .99]);
14 tela = toc(tstart);
15 figure('Position',[1 1 1000 500])
16 set (gca,'fontsize',12)
17 plot (x0,vol,'r') ;hold on;
18 plot (x0,vold,'k') ;hold on;grid on
19 title ([' Calcul du volume. Nombre de rayons ou cel. : ',num2str(nt),...
20 ' . Ecart déterm: ',num2str(round(stat(2)*1000)/1000),...
21 ' , Ec. échant. stratifié: ',num2str(round(stat(1)*1000)/1000)])
22 legend('Echant. stratifié','Deterministe','Location','NorthWest')
23 xlabel('Distance de la source au centre du cube 2 x 2 x 2 = 8')
24 ylabel('Volume relatif');
25 axis ([0 1 bot top]);% axis ([0 1 .999 1.002]);
26 disp (['Vst min moy max : ',num2str([min(vol) mean(vol) max(vol)])])
27 disp (['Ecart max. Vs r : ',num2str(round(stat(1)*1000)/1000)])
28 disp (['Vde min moy max : ',num2str([min(vold) mean(vold) max(vold)])])
29 disp (['Ecart max. Vd r : ',num2str(round(stat(2)*1000)/1000)])
30 disp (['cpu : ',num2str(tela)])

```

Table 11 : Procédure Matlab[®] de calcul du volume d’un cube par lancer de rayons

```

1 function[vol]=T12(anze,lont,x0,pte)
2 x = cos(anze).*cos(lont);
3 y = cos(anze).*sin(lont);
4 z = sin(anze);
5 nt = size(anze,1);
6 for i = pte+1:-1:1
7     for j =1:nt;
8         if abs(x(j)) < .0001;x(j)=0.0001;end
9         if abs(y(j)) < .0001;y(j)=0.0001;end
10        if abs(z(j)) < .0001;z(j)=0.0001;end
11        t=[(-1+x0(i))/x(j) (1+x0(i))/x(j) -1/y(j) 1/y(j) -1/z(j) 1/z(j)];
12        for k=1:6
13            if t(k) < 0; t(k)=100;end
14        end
15        lon(j) = min(t)^3;
16    end
17    vol(i) = sum(lon)*pi/(6*nt);
18 end

```

Table 12 : Fonction Matlab[®] de calcul du volume d’un cube par lancer de rayons

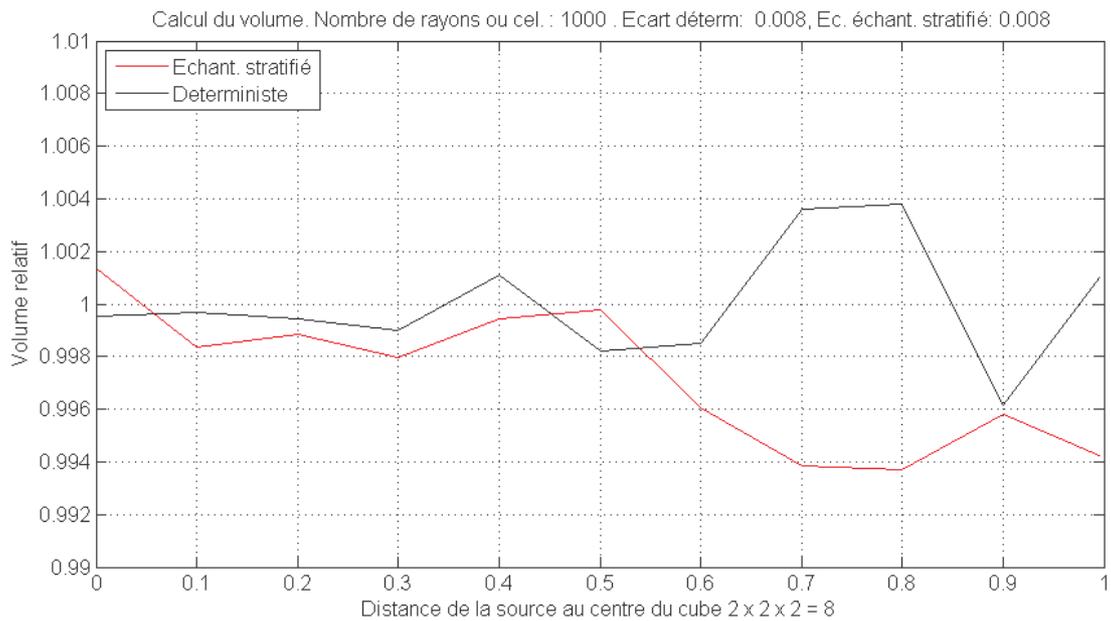


Figure 23 : Résultats des lancers de rayons (stratifiés et déterministes) depuis différents points

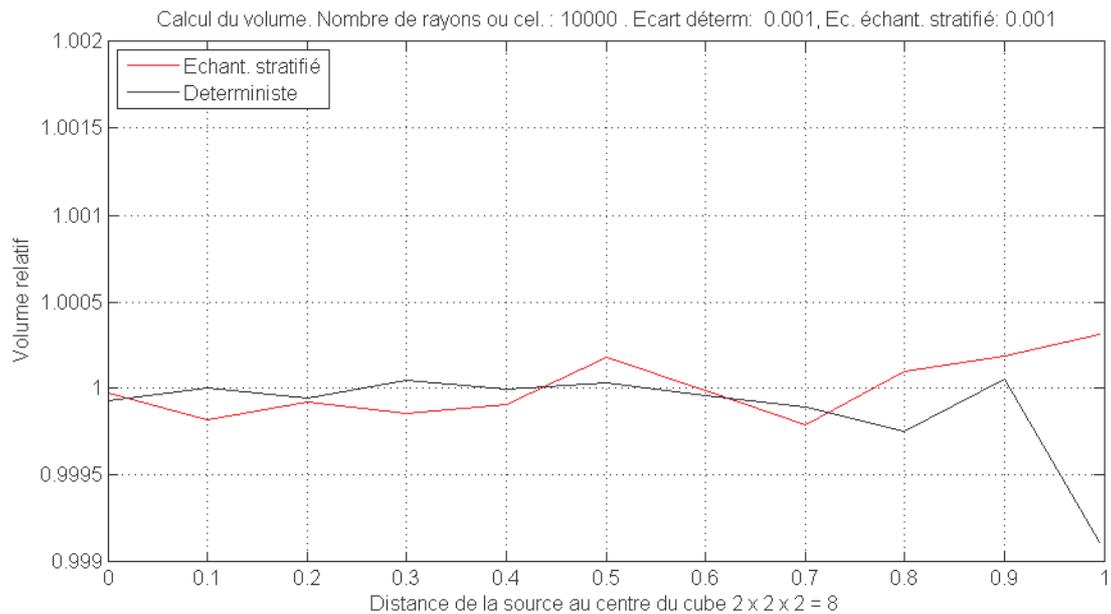


Figure 24 : Ecart maximum de volume : 0.001, cpu : 4.4 s.

Exercice n° 4 : Soit un hexaèdre donné par les pieds des six perpendiculaires abaissées de l'origine sur ses six faces. Calculer son volume en utilisant la technique du lancer de rayons. Effectuer le même calcul en décomposant l'hexaèdre en cinq tétraèdres et en additionnant leurs volumes.

5. Maillages de Voronoï et de Delaunay

Le diagramme de Voronoï², aussi appelé *pavage* ou en anglais : *tessellation* (littéralement mosaïque) de Dirichlet est un découpage du plan en cellules créées à partir de points appelés *germes* et disposés de manière quelconque. Chaque cellule comporte un seul germe ; elle forme l'ensemble des points plus proches de ce germe que de tout autre germe.

En liant toutes les paires de germes appartenant à des cellules ayant un coté commun, on forme un maillage triangulaire appelé maillage de Delaunay. Cette triangulation a été inventée par le mathématicien russe Boris Delaunay (Saint-Petersbourg, 1890 – Moscou, 1980), dans un article publié en 1934 [Delaunay 1934]. C'est le maillage dual de celui de Voronoï

SUR LA SPHÈRE VIDE

PAR M. B. DELAUNAY,

Professeur à l'Université de Léningrad, Léningrad, Russie.

Soit E un système de points distribués régulièrement dans l'espace, au sens de Bravais, c'est-à-dire un système parallélépipédique de points (Fig. 1). Je me propose de considérer une sphère se mouvant entre les points de E se rétrécissant et se dilatant à volonté et assujettie à la condition d'être "vide", c'est-à-dire de ne pas contenir dans son intérieur des points de E .

Figure 25 : Début de la publication de Delaunay, 1934

Cette triangulation est telle qu'aucun des sommets du maillage n'est à l'intérieur du cercle circonscrit à l'un des triangles.

Si deux triangles adjacents ne respectent pas la condition du cercle circonscrit, il suffit de remplacer l'arête commune par la ligne joignant les deux autres sommets (technique de *basculement*, en anglais : *swapping*).

La triangulation de Delaunay maximise le plus petit angle de l'ensemble des triangles, conduisant ainsi à l'ensemble de triangles les plus trapus possibles. Le maillage parfait serait donc constitué de triangles équilatéraux.

Comme on le voit à la [Figure 26](#), les arêtes de Voronoï (en bleu) sont les médiatrices de la triangulation de Delaunay.

Enveloppe convexe et maillage d'un nuage de points

La méthode de Voronoï Delaunay permet de créer un maillage à partir d'un ensemble quelconque de points. La procédure crée des triangles à l'intérieur de l'enveloppe convexe de ces points. Les illustrations qui suivent ont été produites à partir de fonctions présentes dans Matlab[®].

Dans l'exemple de la [Figure 26](#), où les points sont définis au hasard, on utilise la fonction *gallery* de Matlab[®] pour générer les points et ce, avec le dernier paramètre égal à 2 pour la composante x et 1 pour y . Parmi tous les triangles, l'angle minimum observé est de 0.7° , le

² Georgy Fedoseevich Voronoï (Jouravka, 1868 – Varsovie, 1908) est un mathématicien russe qui a défini et étudié le cas général en dimension n en 1908.

maximum de 55.3° et la moyenne des minimums de 25.1° (procédures Matlab de la [Table 14](#) et la [Table 16](#)). A la [Figure 27](#), on effectue le même calcul avec cent points.

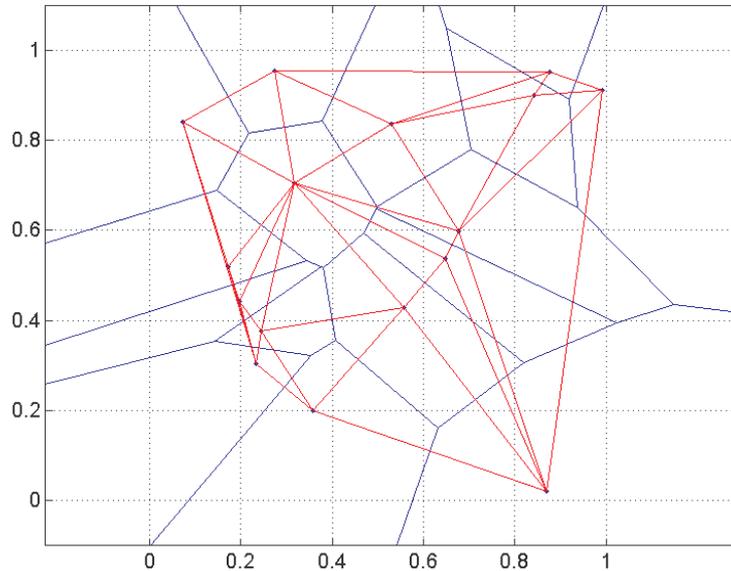


Figure 26 : Voronoï – Delaunay, 16 points, paramètres 2, 1. Angle min. moyen : 25.1°

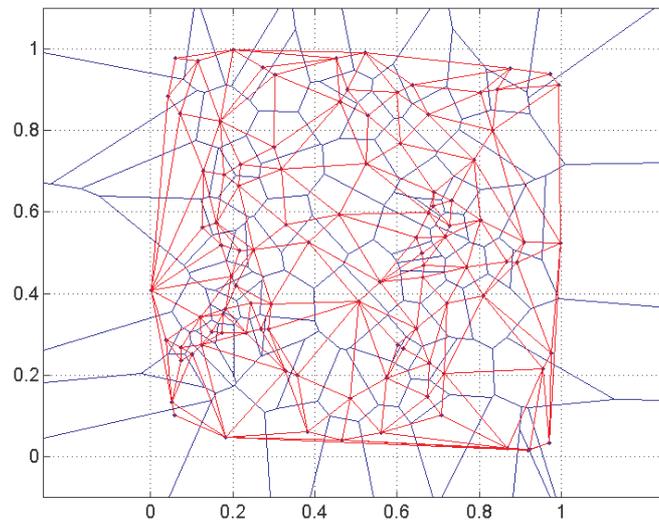


Figure 27 : Voronoï – Delaunay, 100 points, paramètres 2,1. Angle min. moyen : 28.4°

Maillage d'un domaine et de sa frontière

Pour obtenir des résultats plus pratiques, en particulier lorsqu'on utilise les maillages de Delaunay dans la méthode des éléments finis [[Frey 1999](#), [Geuzaine 2009](#)], il convient de discrétiser également le contour du domaine que l'on souhaite mailler, comme dans la [Figure 28](#) ou dans le réseau de 4096 points de la [Figure 29](#).

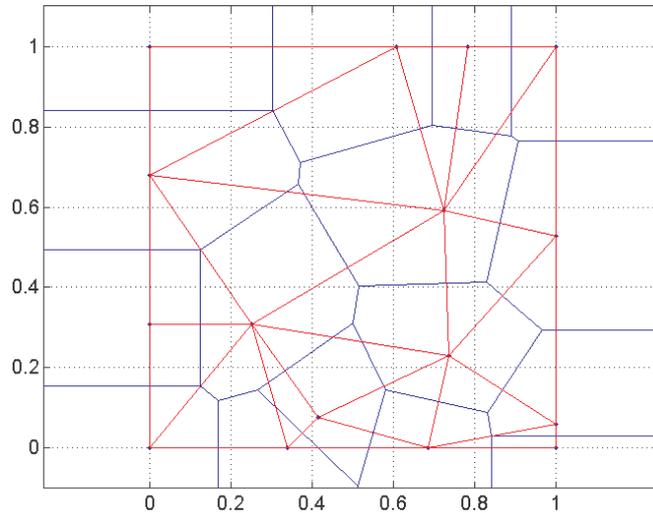


Figure 28 : Voronoï et Delaunay: Angle minimum : min : 10.8, max. : 50.8, moyen : 32.2

tri=[6	7	10	[x' y']=[0	1.0000
6	2	7	0	0.6790
7	4	8	0	0.3086
10	11	12	0	0
11	7	8	0.6077	1.0000
12	11	8	0.7262	0.5904
10	7	11	0.2524	0.3090
7	3	4	0.3404	0
7	2	3	0.7831	1.0000
6	5	2	0.7382	0.2312
2	5	1	0.4149	0.0766
12	15	10	0.6870	0
14	13	6	1.0000	1.0000
6	9	5	1.0000	0.5282
6	13	9	1.0000	0.0600
16	15	12	1.0000	0]
10	15	14		
10	14	6]		

Table 13 : Topologie et géométrie du maillage de Delaunay de la Figure 28

```

1 clear all;n=3;px=2;py=1;
2 xm = gallery('uniformdata',[n n],px);
3 ym = gallery('uniformdata',[n n],py);
4 figure;set(gca,'fontsize',15)
5 voronoi(xm,ym);hold on % Dessin des polygones de Voronoï
6 x(1:n*n)=xm(1:n,1:n);y(1:n*n)=ym(1:n,1:n); % Transf. matrices à vecteurs
7 z = zeros(1,size(x,2));
8 tri = delaunay(x,y);
9 triplot(tri,x,y,'r');hold on;grid on
10 set(gca,'XTick',0:.2:1);set(gca,'YTick',0:.2:1);
11 axis([-0.05 1.05 -0.1 1.1]);axis equal
12 S = [x' y' z']; % Matrice des points du maillage
13 ami = T16(tri,S); % Fonction calculant les angles min. d'un maillage
14 disp('=====')
15 disp(['Minimum des minim. : ',num2str(min(ami))])
16 disp(['Maximum des minim. : ',num2str(max(ami))])
17 disp(['Moyenne des minim. : ',num2str(sum(ami)/size(tri,1))])
18 title(['Voronoi Delaunay,',num2str(n*n),' points, param. ',num2str(...
19 [px py]),', angle min moyen : ',num2str(sum(ami)/size(tri,1))])

```

Table 14 : Procédure Matlab[®] de création d'un maillage de Voronoï Delaunay

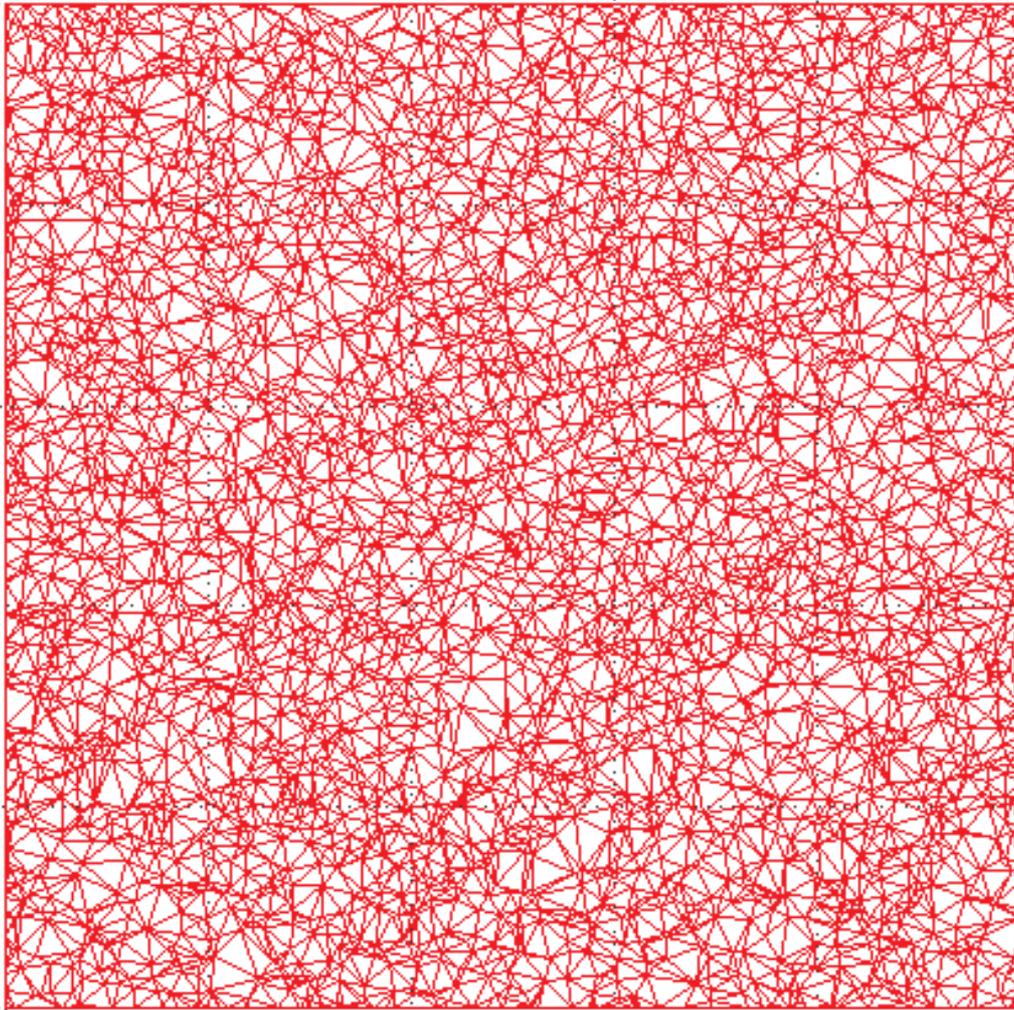


Figure 29 : Maillage de Delaunay, $64 \times 64 = 4096$ points, angle minimum moyen : 30.54°

Pour mieux appréhender les propriétés du maillage de Delaunay, il est conseillé de traiter en détail l'exemple suivant.

On crée un maillage de neuf points. Les triangles du maillage sont donnés à la colonne 1 et les coordonnées des points à la colonne 2 de la [Table 15](#). Après avoir exécuté la procédure de la [Table 14](#) avec les données $n = 3$, $px = 2$, $py = 1$, on obtient le résultat de la [Table 15](#) en entrant simplement les commandes `tri` et `[x' y']`. Le résultat est visualisé à la [Figure 30](#).

tri= [2	6	4	[x' y']=	
7	1	3	[0.8752	0.9528
8	2	5	0.3179	0.7041
2	7	3	0.2732	0.9539
2	4	7	0.6765	0.5982
4	9	1	0.0712	0.8407
5	2	3	0.1966	0.4428
8	6	2	0.5291	0.8368
7	4	1	0.1718	0.5187
6	9	4]	0.8700	0.0222]

Table 15 : Topologie et géométrie du maillage de Delaunay de la [Figure 30](#)

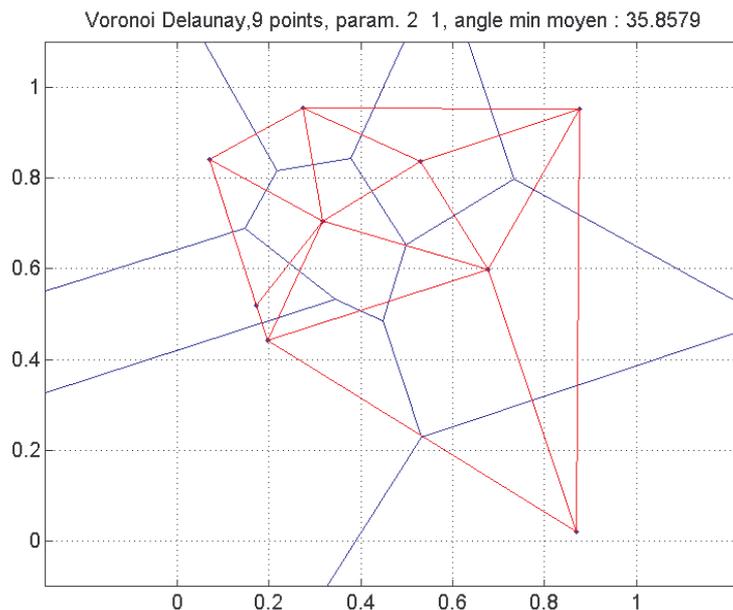


Figure 30 : Voronoï – Delaunay, 9 points, paramètres 2, 1. Angle min. moyen : 35.9°

Exercice n°5 : Pour un maillage de Delaunay donné, calculer la somme des plus petits angles des triangles, vérifier que la frontière entre deux éléments est toujours la plus petite des diagonales du quadrilatère formé par ces deux mêmes triangles et, enfin, dessiner et vérifier que les cercles circonscrits aux triangles ne contiennent pas d'autre sommets que les trois du triangle concerné.

```

1 function [ami] = T16(tri,S)
2 ami= zeros(size(tri,1),1);
3 as = zeros(1,3);
4 for i=1:size(tri,1);
5     v1 =(S(tri(i,2),:)-S(tri(i,1,:)))/norm((S(tri(i,2),:)-S(tri(i,1,:))));
6     v2 =(S(tri(i,3),:)-S(tri(i,1,:)))/norm((S(tri(i,3),:)-S(tri(i,1,:))));
7     vert = cross(v1,v2);
8     as(1)= asin(vert(3))*180/pi;
9     if dot(v1,v2)<0;as(1) = 180-as(1);end
10    v1 =(S(tri(i,3),:)-S(tri(i,2,:)))/norm((S(tri(i,3),:)-S(tri(i,2,:))));
11    v2 =(S(tri(i,1),:)-S(tri(i,2,:)))/norm((S(tri(i,1),:)-S(tri(i,2,:))));
12    vert = cross(v1,v2);
13    as(2)= asin(vert(3))*180/pi;
14    if dot(v1,v2)<0;as(2)=180-as(2);end
15    v1 =(S(tri(i,1),:)-S(tri(i,3,:)))/norm((S(tri(i,1),:)-S(tri(i,3,:))));
16    v2 =(S(tri(i,2),:)-S(tri(i,3,:)))/norm((S(tri(i,2),:)-S(tri(i,3,:))));
17    vert = cross(v1,v2);
18    as(3)= asin(vert(3))*180/pi;
19    if dot(v1,v2) <0 ;as(3)=180-as(3);end
20    ami(i)= min(as);
21 end
22 end

```

Table 16 : Fonction Matlab[®] pour le calcul des angles min d'un maillage de Voronoï Delaunay

6. Projection de la sphère

Dans ce chapitre, on examine les projections de la sphère qui sont les plus utiles dans le cadre des études radiatives et de lancer de rayons. Afin de le rendre plus perceptible, le problème est abordé au travers de la cartographie. La projection de la sphère sur un plan peut être réalisée au moyen d'une projection parallèle, centrale ou axiale, sur le plan, sur le cylindre ou sur le cône, ces deux dernières surfaces pouvant être ramenées au plan par développement. On ne cherche pas la projection idéale mais le respect de certaines propriétés [Beckers 2014].

Plate carrée

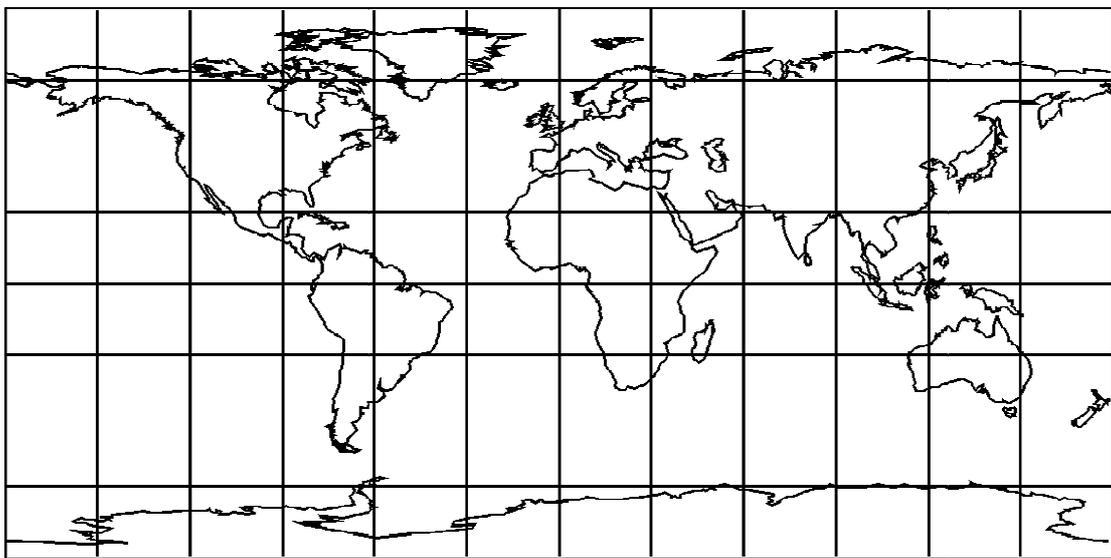


Figure 31 : Plate carrée ; horizontalement : longitude, verticalement : latitude.

Une présentation plane très simple de la sphère terrestre consiste à construire un diagramme où l'on reporte les longitudes en abscisse et les latitudes en ordonnée. Un écart identique en latitude et en longitude donne un carré, d'où le nom de : “plate carrée³” (Figure 31). Dans cette représentation, figurent également l'équateur, les tropiques et les cerces polaires.

$$\text{Plate carrée} \rightarrow \begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \varphi \end{aligned} \quad (6.1)$$

Projection de Mercator

Quand on projette sur le cylindre, son axe est généralement perpendiculaire à l'équateur. Les méridiens se projettent selon des génératrices du cylindre et les parallèles selon des sections circulaires du cylindre. La longueur du parallèle de latitude α est égale à $2\pi R_T \cos \alpha$. Sur la

³ Remarque : Sur la plupart des cartes de ce chapitre, on insère l'équateur, les deux tropiques ($\alpha = \pm 23.5^\circ$) et les deux cercles polaires ($\alpha = \pm 66.5^\circ$) ainsi que les méridiens à intervalles de deux heures.

projection, elle est égale à $2 \pi R_T$. Le rapport épure/réel vaut donc $1 / \cos\alpha$. Il tend vers l'infini quand on s'approche des pôles.

Dans la projection de *Mercator*, on adopte, pour le tracé des méridiens, le facteur $1 / \cos\alpha$, identique à celui qui correspond à l'allongement des parallèles. De la sorte, un carreau de la sphère limité par deux méridiens et deux parallèles est représenté par un rectangle de rapport hauteur / largeur = $1 / \cos\alpha$.

Les coordonnées de la carte, x (selon l'équateur) et y (selon les méridiens), sont liées aux positions sur la sphère par la relation:

$$\begin{aligned} x &= \varphi \\ \text{Mercator} \rightarrow y &= \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = \ln (\operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Cette transformation rend la carte de Mercator conforme. Contrairement aux orthodromies (plus courts chemins), les loxodromies (routes à cap constant) y apparaissent comme des lignes droites.

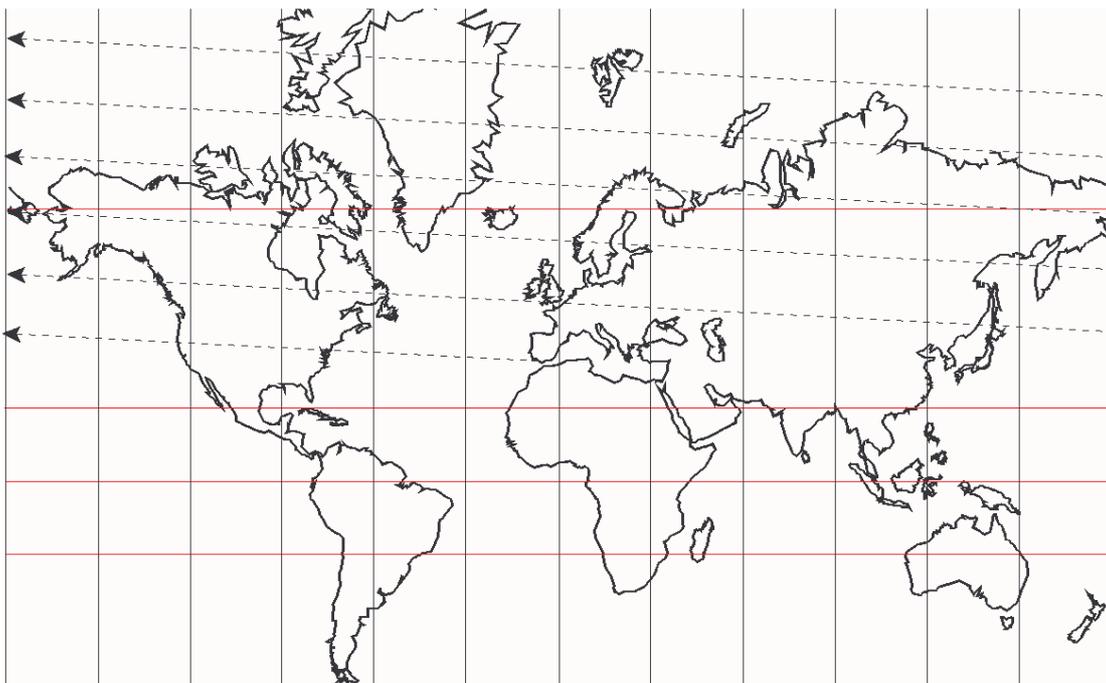


Figure 32 : Mercator : loxodromie construite à partir de Gibraltar vers le nord-ouest

A la Figure 33, on a représenté le trajet Berlin-Vancouver. Paradoxalement, le trajet de plus courte distance est représenté, non par la droite, qui correspond à une *loxodromie* appelée aussi route à cap constant, mais par la courbe. Une autre loxodromie est représentée, en pointillé, à la Figure 32. Entre deux points de latitude différente, il existe une infinité de loxodromies correspondant à des trajets où on effectue, éventuellement, plusieurs fois le tour de la terre. Sur cette figure on voit une ligne de cap constant, qui part de Gibraltar et semble ne jamais atteindre le pôle. En fait, la carte s'étend à l'infini vers le haut, mais les distances deviennent de plus en

plus faibles. La largeur du graphe correspond à des parallèles de plus en plus proches du pôle et dont la longueur tend vers zéro.

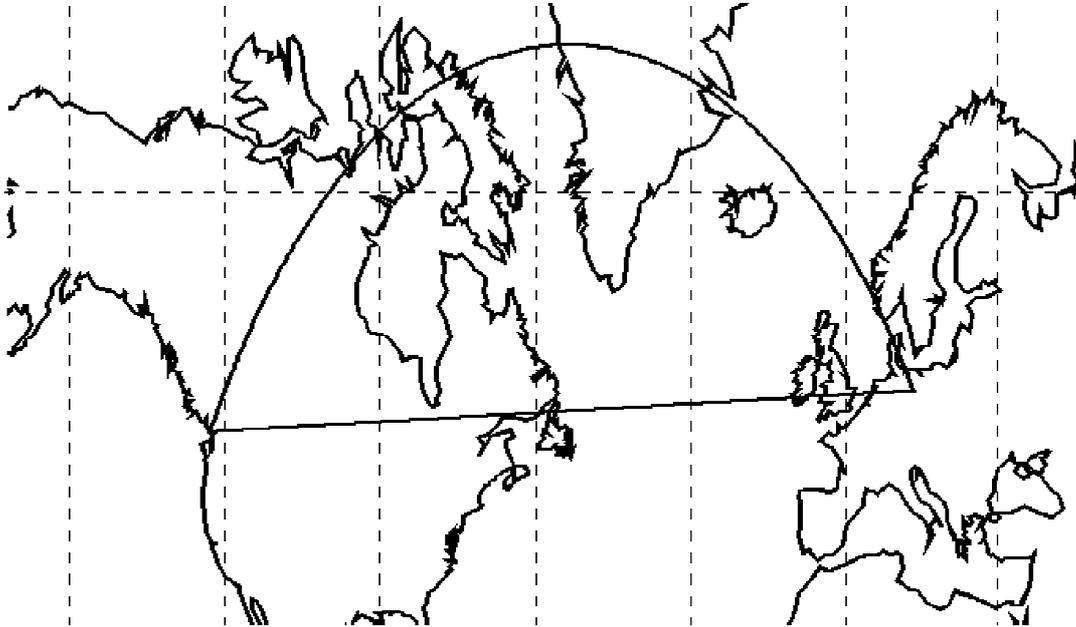


Figure 33 : Mercator : orthodromie et loxodromie entre Berlin et Vancouver

Projection stéréographique

La situation où le centre de projection est situé sur la sphère et où le tableau est le plan tangent situé à son antipode mérite une attention toute particulière, car il s'agit en fait d'une **inversion**. Par conséquent c'est une projection *conforme*, ce qui signifie que l'angle entre deux lignes tracées sur la sphère est conservé sur la stéréographie

Si la projection est centrée sur le pôle nord, on obtient la correspondance suivante entre les coordonnées sphériques et celle de la carte située dans le plan de l'équateur:

$$\begin{aligned} \text{Stéréographie} \rightarrow r &= \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \quad (6.3)$$

Rappelons la formule de calcul de l'ordonnée dans la projection de Mercator (6.2):

$$y_M = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (6.4)$$

En passant à la colatitude, on obtient :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.5)$$

En substituant dans (6.4), on a :

$$y_M = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \ln \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = -\ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (6.6)$$

Notons en (6.6) la relation trigonométrique intéressante :

$$\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (6.7)$$

On a donc finalement une nouvelle formule pour la projection de Mercator :

$$\begin{aligned} x &= \varphi \\ \text{Mercator} \rightarrow y &= -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

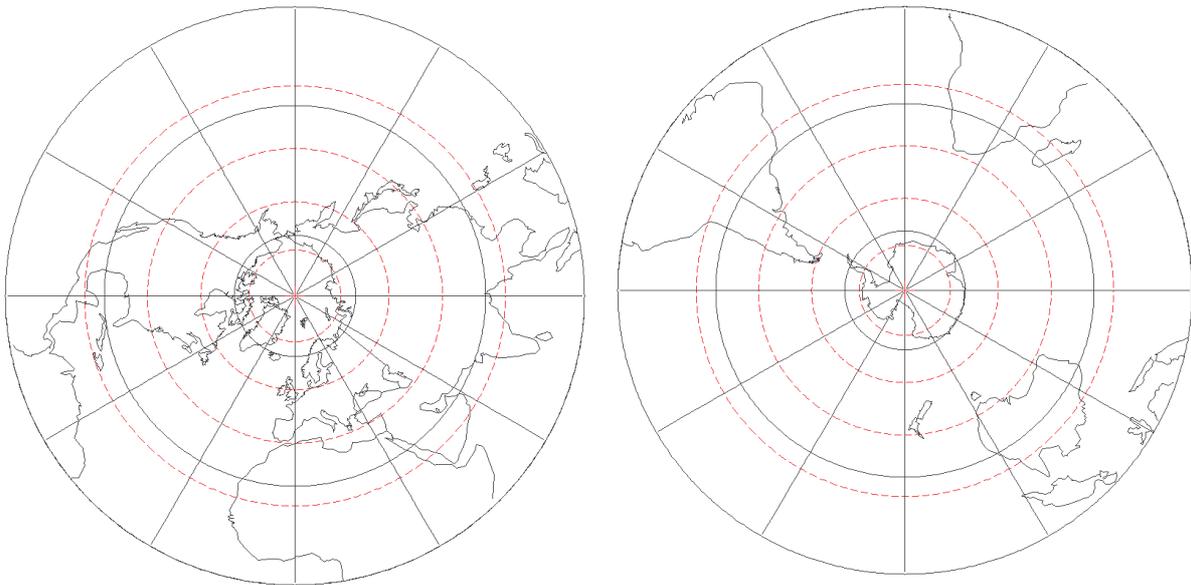


Table 17 : Projections stéréographiques des hémisphères nord et sud

Les projections stéréographiques et de Mercator sont conformes. Cela signifie que l'angle entre deux lignes dessinées sur la sphère est conservé dans ces projections.

Notons enfin que sur les figures de la *Table 17* les lignes rouges pointillées sont séparées de 2000 km.

Trajets solaires

La projection stéréographique est très utile pour représenter l'environnement complet autour d'un point. C'est ce qui est réalisé pour un point situé au milieu de la place principale de la ville de Compiègne (*Figure 34*).

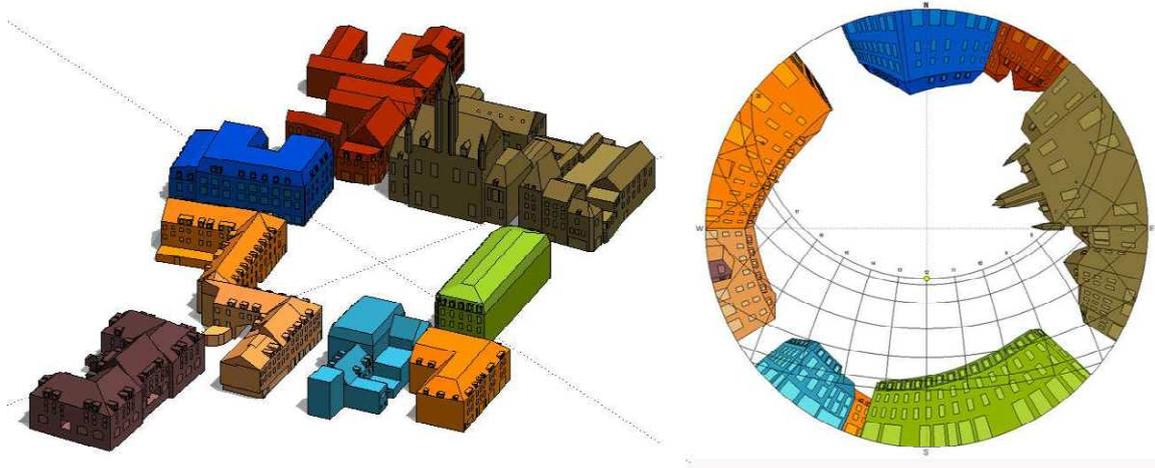


Figure 34 : Modèle GIS de la Grand-Place de Compiègne et stéréographie (Heliodon 2)

Pour construire cette représentation, on effectue une projection centrale sur l'hémisphère situé au dessus du plan horizontal local. Dans une seconde étape, on réalise la projection stéréographique de cet hémisphère. On obtient ainsi une projection plane qui est conforme et qui représente le demi-espace situé au dessus du plan de la projection (partie de droite de la *Figure 34*).

Sur ce dessin, on a superposé la projection stéréographique des trajectoires solaires à différentes époques de l'année (arcs sur l'hémisphère et dans la projection de la *Figure 35*). Ces arcs sont projetés en stéréographie selon les traits bleus allant des points culminants des trajectoires des solstices et des équinoxes vers le nadir de l'hémisphère. Ils sont ensuite superposés à la projection de la scène [Beckers 2011]. Les astérisques qui sont situées aux extrémités supérieures des rayons bleus de la *Figure 35* définissent les positions du soleil aux points les plus hauts des trajectoires journalières : midis solaires [Beckers 2010].

Les trajectoires solaires sont des arcs de cercle tracés sur la sphère. Leurs positions varient entre zéro degré lorsque le trajet solaire est dans le plan équatorial. Cette situation se présente aux équinoxes (mars et septembre). Le trajet solaire correspond au parallèle du tropique du Cancer (23.5° nord) le 21 juin, jour du solstice d'été, et au tropique du Capricorne (23.5° sud) le 21 décembre, jour du solstice d'hiver.

Ces dates et positions correspondent à une trajectoire circulaire idéale de la terre autour du soleil. En réalité, la trajectoire est elliptique et, de plus, elle est soumise à de petites fluctuations. Un calcul précis de ces grandeurs demande de résoudre l'équation de Kepler liant l'anomalie vraie à l'anomalie excentrique ainsi que la prise en compte de la position exacte des planètes et des astres à un moment précis donné [Beckers 2010].

En se basant sur l'hypothèse de la trajectoire terrestre circulaire, le calcul de la déclinaison du soleil en fonction du jour de l'année est effectué de la manière suivante. L'angle δ désigne la *déclinaison*, le paramètre J le numéro du jour de l'année du calendrier (1 pour le 1^{er}

janvier) et l'angle $\varepsilon = 23.45^\circ = 0.4093$ radians, l'*inclinaison* de l'orbite terrestre par rapport au plan de l'*écliptique*.

$$\delta = \frac{180}{\pi} \arcsin \left(\sin \varepsilon \sin \frac{2\pi}{365.25} (J - 81) \right) \quad (6.9)$$

La formule (6.9) est transcrite dans la syntaxe Matlab[®] de la manière suivante.

```
jm =[172 202 233 264 294 325 355];
round(asin(sin(23.5*pi/180)*sin(2/365.25*(jm-81)*pi))*180/pi)/10
```

On obtient les déclinaisons au cours du second semestre (jours définis dans le vecteur jm). Les déclinaisons calculées par la formule (6.9) : [23.5 20.4 11.6 -0.1 -11.5 -20.3 -23.5] sont légèrement différentes de celles qui ont été utilisées dans la procédure conduisant à la [Figure 36](#) et les suivantes où on a utilisé les valeurs : [-23.5 -20 -11.3 0 11.3 20 23.5].

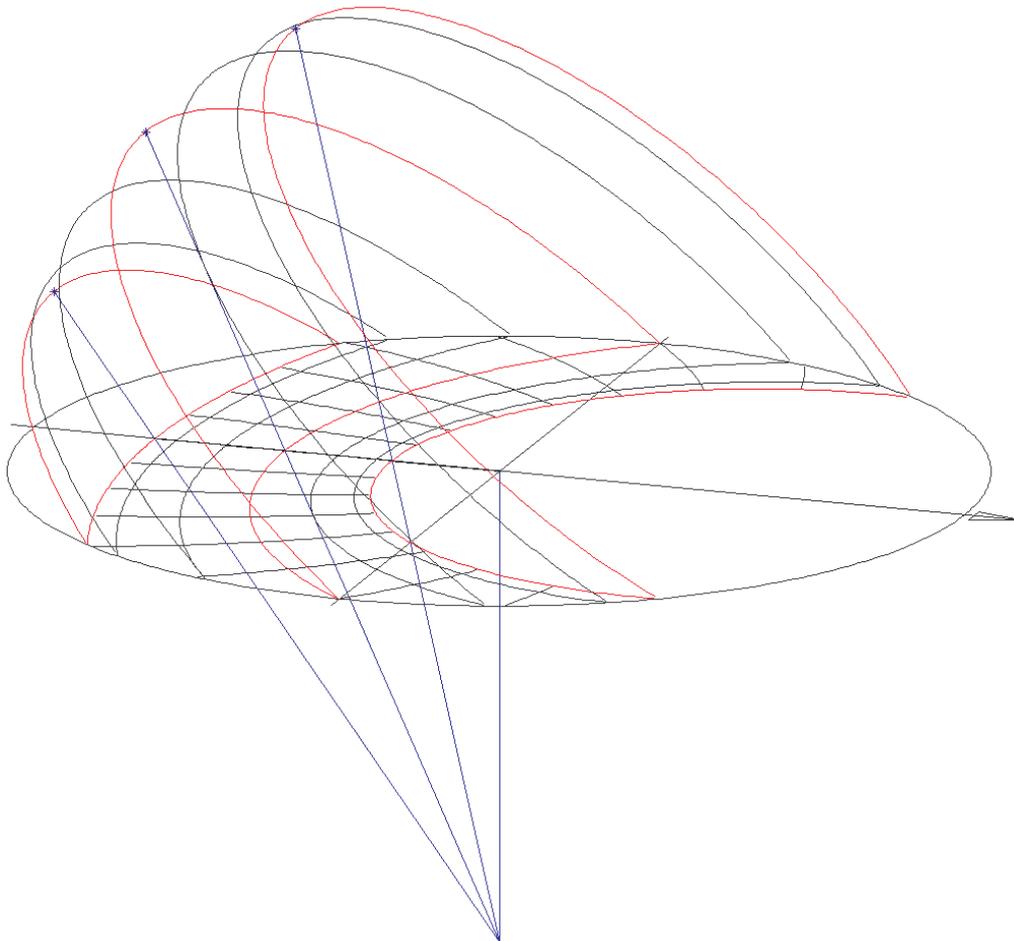
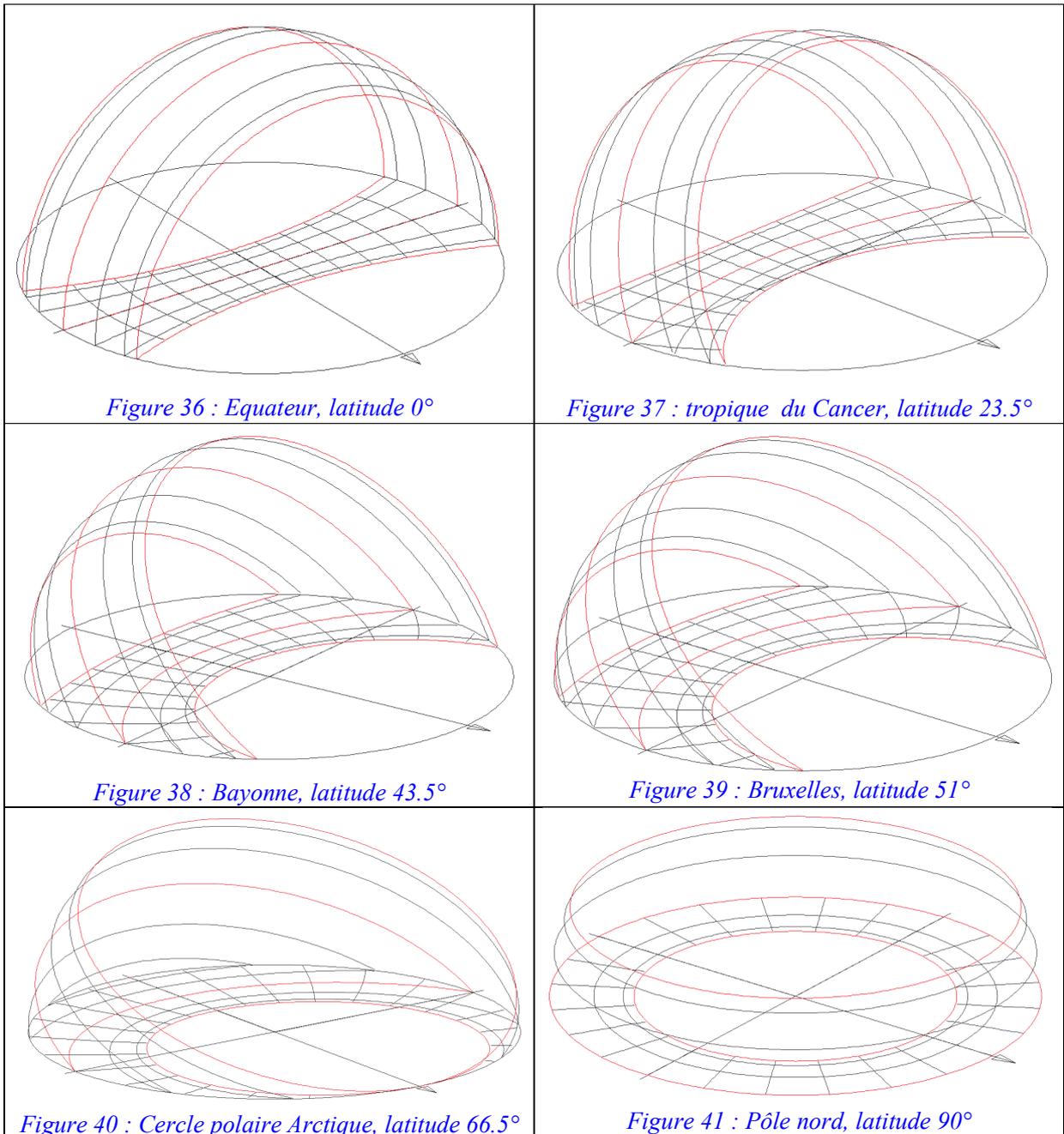


Figure 35 : Projections stéréographiques des trajectoires solaires à Compiègne

Dans la procédure de la [Table 18](#), on calcule les projections stéréographiques des trajectoires du soleil aux deux solstices et à un des équinoxes, en différents points de

l'hémisphère nord du globe terrestre. Les données en sont : les trois déclinaisons considérées ici (ligne 1), ainsi que la latitude où se fait le calcul (ligne 2). Les lignes 3 et 4 sont consacrées à l'ajustement des latitudes pour lesquelles la projection d'une des trajectoires est une droite.

La boucle sur les n (dimension du vecteur définissant les déclinaisons à la ligne 1) trajectoires à représenter se situe entre les lignes 5 et 25. Les instructions de la boucle se comprennent facilement grâce aux commentaires inclus dans la procédure.



```

1 clear all;dec=[23.5 0 -23.5];kt=0;figure;clc; % Déclinaisons
2 lat = 90.0;% 41.3; % Barcelone %43.5;% Bayonne % Point d'observation
3 lat = max(lat,.0001);lat = min(lat,90); % Conditions sur la latitude
4 if norm(lat-23.5)<.1;lat=23.4;kt=1;end;lat=lat*pi/180; % Cas du tropique
5 for i = 1:size(dec,2); % Boucle sur déclianisons définies ligne 1
6 tau = dec(i); % Déclinaison trajectoire solaire > -23.5 et < 23.5
7 tau = max(-23.5,tau); % Latitude tau du petit cercle >= -23.5
8 tau = min( 23.5,tau)*pi/180; % Latitude tau du petit cercle <= 23.5
9 ycl = cos(lat)/(sin(lat) + sin(tau)); % Centre de l'arc circulaire
10 rcl = cos(tau)/(sin(lat) + sin(tau)); % Rayon de l'arc circulaire
11 iy = max((ycl^2+1-rcl^2)/(2*ycl), -1); % Coord. int. y arc et cercle
12 iy = min(1,iy); % Ce point doit être à l'intérieur ou sur le cercle
13 ix = sqrt(1-iy^2); % Coordonnée x inter. arc et cercle
14 ian = atan2(iy-ycl,ix); % angle de début ou de fin arc sur trajet
15 a = (0:360)*pi/180; % Discrétisation du cercle extérieur
16 if ycl>0;b=((pi-ian):(pi+2*ian)/100:2*pi+ian);end % Discrét. arc solaire
17 if ycl<0;b=(-ian:-(pi-2*ian)/100:-pi+ian);end% Discrétisation arc solaire
18 plot(cos(a),sin(a),'k');axis equal;grid on;hold on % Cercle extérieur
19 plot(rcl*cos(b),ycl+rcl*sin(b),'r');axis equal;grid on;hold on % Arc sol.
20 if lat == 0.005; lat=0.;end; % Récupération de l'équateur
21 if kt > 0 ;title(['Trajets solaires. Déclinaisons : ',num2str(dec),...
22 ', latitude: 23.5°']);else title(['Trajets solaires. Déclinaisons : ',...
23 num2str(dec),', latitude : ',num2str(lat*180/pi),'°']);
24 end;axis([-1.02 1.02 -1.02 1.02]);
25 end

```

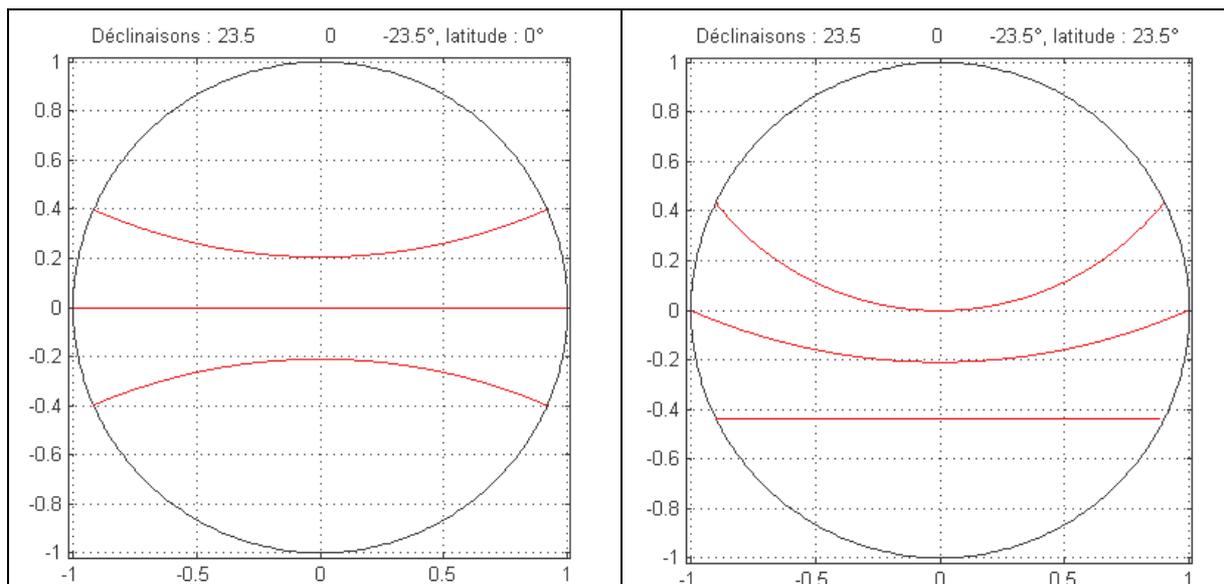
Table 18 : Procédure Matlab[®] : représentation des trajectoires solaires aux solstices et à l'équinoxe

Les dessins de la Table 19 sont réalisés avec la procédure de la Table 18.

Exercices : Représenter les directions d'un tir de n rayons sur une plate carrée.

Représenter les directions d'un tir de n rayons sur une cylindrique équivalente.

Exercice n°6 : Depuis une latitude donnée, représenter en projection stéréographique les trajets du soleil aux solstices et aux équinoxes. Reproduire, sur le même dessin, la projection stéréographique d'un bâtiment,



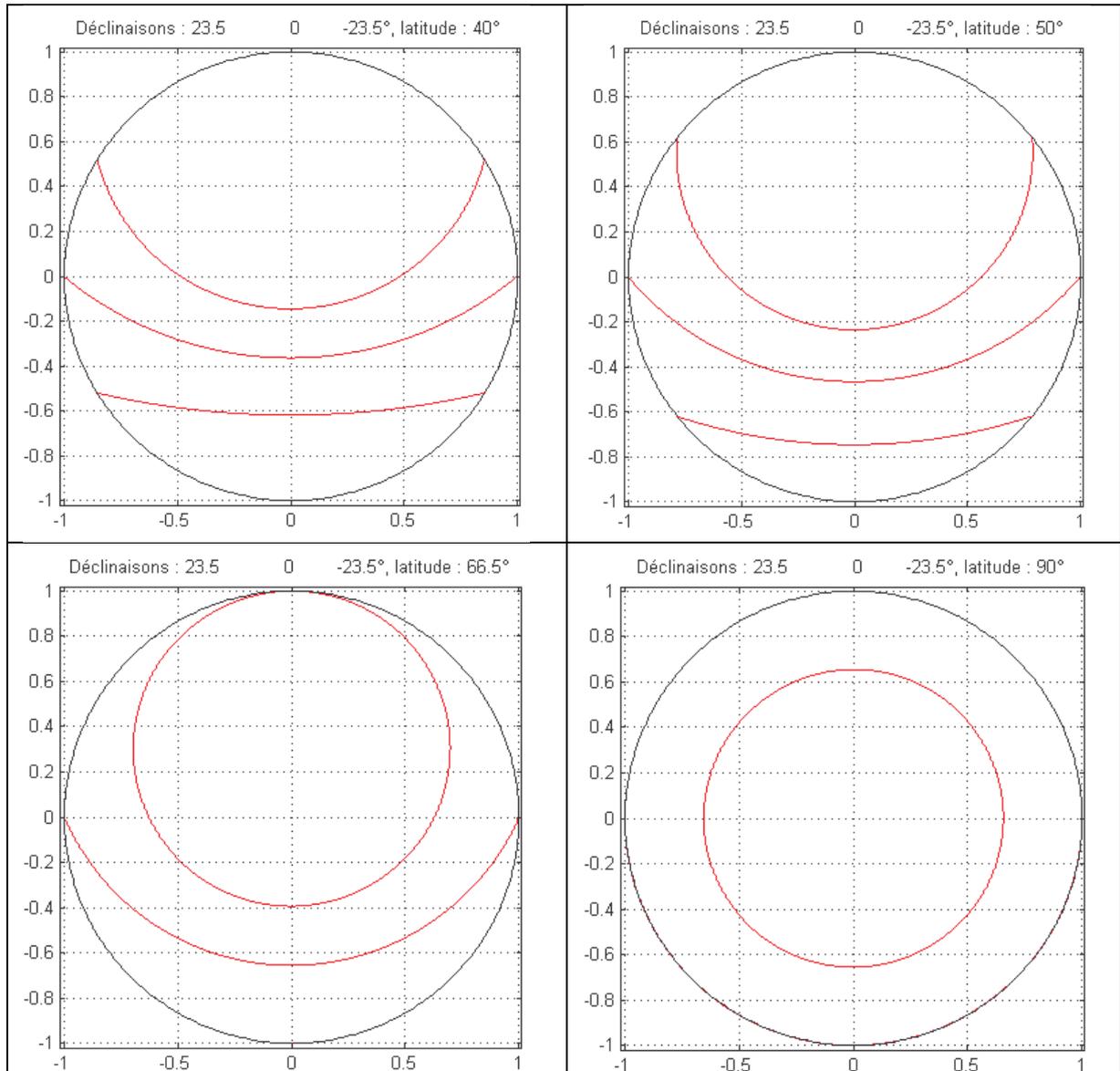


Table 19 : Trajectoires solaires aux solstices et à l'équinoxe

Conclusion

Les méthodes qui permettent de représenter numériquement les objets de l'espace tridimensionnel ont été élaborées depuis le début du développement de l'infographie et de la CAO. Les livres tels que [Rogers 1976, Foley Dam 1982] ont été largement diffusés et réédités plusieurs fois. La plupart des thèmes ont fait l'objet de séminaires dans les réunions internationales telles que Siggraph et Eurographics [Botsch 2008] ou ont fait l'objet de publications récentes [Beckers 2014].

La *Table 20* contient les énoncés de six exercices. Ceux-ci sont représentatifs des problèmes à maîtriser pour pouvoir réaliser les simulations numériques liées aux lancers de rayons et aux études de thermique radiative.

Géométrie assistée par ordinateur

CAG 1 : Droites et plans.

Exercice n°1 : Soit un hexaèdre donné par les pieds des six perpendiculaires abaissées de l'origine sur ses six faces. Calculer ses huit sommets et le dessiner. Dans une seconde étape, décomposer l'hexaèdre en cinq tétraèdres et calculer son volume.

CAG 2 : Courbes et surfaces polynomiales paramétriques.

Exercice n°2 : Calculer l'aire d'un carreau de Coons, soit en le décomposant en $n \times n$ éléments, chacun des éléments étant assimilé à un assemblage de quatre triangles, soit en effectuant le calcul directement en se basant sur les points et poids de Gauss. Analyser la convergence de la solution.

CAG 3 : Sphère, polygones sphériques et angles solides

Exercice n°3 : Calculer l'angle solide d'un polygone de l'espace en se basant sur les angles aux sommets du polygone sphérique associé. Effectuer le même calcul en se basant sur les longueurs des cotés du même polygone sphérique.

CAG 4 : Lancer de rayons

Exercice n°4 : Soit un hexaèdre donné par les pieds des six perpendiculaires abaissées de l'origine sur ses six faces. Calculer son volume en utilisant la technique du lancer de rayons. Effectuer le même calcul en décomposant l'hexaèdre en cinq tétraèdres et en additionnant leurs volumes.

CAG 5 : Maillages de Voronoï et de Delaunay

Exercice n°5 : Pour un maillage de Delaunay donné, calculer la somme des plus petits angles des triangles, vérifier que la frontière entre deux éléments est toujours la plus petite des diagonales du quadrilatère formé par ces deux mêmes triangles et, enfin, dessiner et vérifier que les cercles circonscrits aux triangles ne contiennent pas d'autre sommet que les trois du triangle concerné.

CAG 6 : Projections de la sphère, stéréographie

Exercice n°6 : Depuis une latitude donnée, représenter en projection stéréographique les trajets du soleil aux solstices et aux équinoxes. Reproduire, sur le même dessin, la projection stéréographique d'un bâtiment,

Table 20 : Plan des travaux dirigés et du cours de géométrie assistée par ordinateur

Références

- [Beckers 2010] Beckers B., Beckers P., “Comment calculer la déclinaison du soleil”, Rapport Helio_007_fr, www.heliodon.net/heliodon/documents.html
- [Beckers 2011] Beckers B., “Modélisation du rayonnement dans les projets architecturaux et urbains”, mémoire de thèse HDR, UTC, 2011, http://www.heliodon.net/downloads/Beckers_2011_HDR_20111212.pdf
- [Beckers 2012] Beckers B., Beckers P., “A general rule for disk and hemisphere partition into equal area cells”, *Computational Geometry : Theory and Applications*, vol. 45, no. 7, pp. 275 - 283, 2012
- [Beckers 2013] Beckers B., Beckers P., “Sky vault partition for computing daylight availability and shortwave energy budget on an urban scale”, *Lighting Research & Technology*, December 2014 46: 716-728
- [Beckers 2014] Beckers B., Beckers P., “Reconciliation of Geometry and Perception in Radiation Physics”, FOCUS Series in Numerical Methods in Engineering, Wiley-ISTE, 192 pages, July 2014
- [Beckers 2016] Beckers B., Beckers P., “Complete set of Matlab procedures for achieving uniform ray generation”, Report Helio_011_en, www.heliodon.net/heliodon/documents.html
- [Bézier 1982] Bézier P. “Petite histoire d’une idée bizarre”, Bulletin de la section d’Histoire des Usines Renault, Tome 4, Juin 1982, N°24, p.256-268.
- [Bézier 1986] Bézier P., “The mathematical basis of the UNISURF CAD system”, Butterworth & Co (Publishers) Ltd, 1986
- [Botsch 2008] Botsch M., Pauly M., Kobbelt L., Alliez P., Lévy B., Bischoff S., Rössl C., “Geometric Modeling Based on Polygonal Meshes”, Eurographics 2008 Full Day Tutorial
- [Casteljau 1985] de Casteljau P., “Formes à pôles”, Mathématiques et CAO, volume 2, Hermes Publishing, 1985,
- [Coons 1967] Coons S, “Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms”, MIT/LCS/TR-41, 1967
- [Coons 1977] Coons S, “Méthode matricielle”, Mathématiques et CAO, volume 5, Hermes Publishing, 1985,
- [Crittenden 2000] Crittenden R.G., “Igloo Pixelizations of the Sky”, *Astro. Lett. and Communications*, Vol. 37, pp. 377-382, 2000
- [Delaunay 1934] Delaunay B., “Sur la sphère vide. à la mémoire de Georges Voronoï”. Bulletin de l’Académie des Sciences de l’URSS, (6):793-800, 1934.
- [Farin 2002] Farin G., “A History of Curves and Surfaces in CAGD”, Arizona State University report, 2002
- [Foley 1982] Foley J.D. and van Dam A., “Fundamentals of Interactive Computer Graphics”, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1982.
- [Frey 1999] Frey P, George PL. “*Maillages - application aux éléments finis*” HERMES Science Publications, 1999.
- [Geuzaine 2009] Geuzaine C, Remacle JF. “Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; 79(11):1309-1331.
- [Hermeline 1982] Hermeline F., “Triangulation Automatique d’un Polyèdre en dimension N”, R A I R O Analyse numérique /Numerical Analysis, (vol 16, n° 3, 1982, p 211 a 242)

[Krokstad 1968] Krokstad A., Strom S., Sorsdal S., “Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique”, *Journal of Sound and Vibration*, 8 (1968), pp. 118- 125

[Lambert 1760] Lambert J.H., “Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae”, Augsburg, C. Detleffsen for the widow of Eberhard Klett, 1760

[Rayleigh 1910] Rayleigh J.W., “CXII. *The problem of the whispering gallery*”, *Philosophical Magazine* Vol. 20 , pp 1001 – 1004, 1910

<https://archive.org/stream/scientificpapers05rayliala#page/n638/mode/1up>

[Rogers 1976] Rogers D.F. and Adams J.A., “Mathematical elements for Computer Graphics”, Rogers D.F. and Adams J.A., McGraw-Hill, 1976.

[Trogenza 1987] Trogenza P.R., “Subdivision of the sky hemisphere for luminance measurements”, *Lighting Research & Technology*; 19: 13 - 14, 1987

[Townsend 2015] Townsend A., “On the Spline: A brief History of the Computational Curve”, <http://www.alatown.com/spline-history-architecture/>

Table des matières

Introduction	1
1. Droites et plans	2
<i>A deux dimensions</i>	2
<i>A trois dimensions</i>	4
<i>Exercices proposés</i>	6
2. Courbes et surfaces polynomiales paramétriques	8
<i>Forme générale des courbes paramétriques</i>	8
<i>Les galeries murmurantes</i>	8
<i>Les coniques</i>	9
<i>Carreau de Coons</i>	13
<i>Intégration numérique sur le carreau de Coons</i>	15
3. Sphère, polygones sphériques et angles solides	17
<i>La droite et le polygone</i>	18
<i>Projection sur la sphère</i>	18
<i>Trigonométrie sphérique</i>	23
<i>Angle solide d'un objet A depuis un point P</i>	25
4. Lancer de rayons	27
<i>Monte Carlo à échantillonnage stratifié</i>	27
<i>Volume d'une sphère</i>	28
<i>Volume d'un cube</i>	30
5. Maillages de Voronoï et de Delaunay	33
<i>Enveloppe convexe et maillage d'un nuage de points</i>	33
<i>Maillage d'un domaine et de sa frontière</i>	34
6. Projection de la sphère	38
<i>Plate carrée</i>	38
<i>Projection de Mercator</i>	38
<i>Projection stéréographique</i>	40
<i>Trajets solaires</i>	42
Conclusion	46
Références	48
Table des matières	50